QUELQUES THEOREMES D'ANALYSE ELEMENTAIRE
LIAISON LYCEE - UNIVERSITE

LEIBNIZ Gottfried Wilhelm , 1646-1716

Daubelcour Jean-Pierre
IREM de Lille

SOMMAIRE

PREFACE

Depuis le début du XX° siècle, l'enseignement de l'Analyse au lycée a subi bien des évolutions. Depuis 1983 le corpus d'Analyse est devenu prépondérant dans le cours de mathématiques en classe terminale scientifique. Dans le même temps s'affirme au plan politique une volonté d'amener 80% d'une classe d'âge " au niveau" du baccalauréat. Après le "Collège unique" installé depuis la fin des années 1970, la seconde indifférenciée favorise, depuis le début des années 80, l'ouverture des Lycées d'enseignement général au plus grand nombre.

Conjointement à cette ouverture du Lycée, on constate dans les séries scientifiques une érosion lente et continue des contenus des programmes d' analyse qui s'accompagne de la disparition progressive de la rationalité dans l'enseignement de cette discipline. Cette évolution est très nette de 1991 à 2001.

Devant ce laminage des mathématiques en général et de l'analyse en particulier, toute la communauté mathématique française réagit. Il en résulte de nouveaux programmes en mathématiques qui sont installés en seconde dès septembre 2000 et en terminale scientifique en 2002.. L'ambition des concepteurs est très claire : il s'agit de mettre un coup d'arrêt au déclin de l'enseignement la discipline dans le secondaire. Les difficultés à appliquer ces nouveaux textes font déjà l'actualité chez les enseignants. Elles proviennent d'abord d'une formation insuffisante au "Collège unique " qui ne facilite pas du tout l'installation de ces programmes dans la classe de seconde indifférenciée. Ces programmes vont continuer à s'installer en TS, sans pour autant que, pour l'instant, des changements structurels soient envisagés au Lycée. Il faut noter, à contrario, des réductions d'horaires en mathématiques en 1° et TS. Les T.P.E.[1]qui accompagnent ces réductions d'horaires ne semblent pas conjuguer l'équilibre avec les disciplines scientifiques comme par exemple la physique et la biologie où la géographie. Ainsi les outils mathématiques utilisés lors des T.P.E. demeurent le plus souvent très élémentaires.

a) **Historique au plan des contenus**. Je joins en annexe 12 de ce texte, un bref historique de l'évolution de l'enseignement de l'analyse en TS, accompagné des programmes officiels. Précisons dès à présent quelques étapes importantes et faisons l'état des lieux en terminale scientifique. Dans les années 1970-80, les concepteurs affirme leur volonté d'une construction de type "Bourbakiste" au travers d'une généralisation excessive du vocabulaire de la théorie des ensembles associée à l'abus des structures algébriques. Ce bouleversement, de la maternelle à l'université, conduit à un enseignement des mathématiques trop formel[2] pour les lycéens et coupé des utilisateurs des mathématiques. Je n'y reviens pas, le sujet a été très souvent traité. Un changement s'imposait, il se fit par réaction au début des années 80 (nouveaux programmes de terminale en 1983et 86) on l'appelle la "contre-réforme". Il importe de souligner, bien que ce soit au détriment de la géométrie et par la suppression radicale de toutes les structures algébriques en 1986, que la prépondérance donnée à l'Analyse est accompagnée d'une grande cohérence, tenant compte des nouveaux outils comme l'ordinateur ou la calculatrice programmable. Les arguments avancés par les concepteurs de ces nouveaux programmes sont très pertinents.

Mais, 18 ans plus tard, avant la mise en application en septembre 2002 des changements annoncés, si les textes des programmes n'ont pas fondamentalement changés, hélas un appauvrissement considérable des exigences s'est installé progressivement en 1991, 1994 et 1997. On peut dire, en caricaturant, que le programme de 97 n'est que le squelette de celui de

---

[1] C'est à dire "Travaux personnels encadrés"

[2] Citons les définitions des limites en $\varepsilon\ \eta$ et la notion de borne supérieure d'une partie non vide et majorée pour définir un réel.

83. Je veux d'abord retenir, dans le programme de juin 94, cette opposition à toute formalisation de l'Analyse, ce refus quasi systématique de toute "Démonstration" de théorème important, en Terminale scientifique. Ceci conduit à un passage, quasiment direct, de l'activité préparatoire à l'application des propriétés admises. Ce constat soulève le bien fondé d'un tel enseignement : les élèves qui se destinent à une formation de mathématicien, de physicien ou plus généralement à un enseignement scientifique de haut niveau y sont-ils suffisamment préparés ? Est-ce raisonnable d'appliquer systématiquement des propriétés ou des concepts dont très souvent l'élève n'a pas saisi le sens, la finalité ? Certains assurent qu'à l'occasion de des problèmes ou des travaux pratiques, l'élève " Démontre" et "Déduit". C'est tout a fait exact, mais insuffisant, sinon comment expliquer ses difficultés à raisonner, à suivre une démonstration, à en reconnaître la légitimité même, toutes choses constatées en terminale et dans les cursus scientifiques post-bac ? C'est ce que je nomme "la perte de rationalité" dans l'enseignement de l'analyse. Cet enseignement se réduit souvent dans la pratique, à la répétition de quelques algorithmes, l'élève est souvent tenté par le psittacisme. L'apprentissage des recettes prend souvent le pas sur une maîtrise de la réflexion. Pour le vérifier il n'est que de lire les énoncés du baccalauréat de cette période 1991 -2001.
Si on veut bien reconnaître qu'il y a là un problème, qu'il se pose bien avant et après la terminale, que les enseignants post-bac en signalent les effets néfastes; une remise en cause de l'enseignement des mathématique en général et de l'analyse en particulier est à l'ordre du jour. Si les propos précédents n'engagent que moi, il faut souligner que la réforme en cours prend en compte certaine des lacunes que je viens de signaler. Cependant les difficultés de réalisations qu'elle rencontre dès la seconde et qui se poseront en septembre 2001 en 1°S et en TS ne sont elles pas aussi liées à la structure des cycles d'enseignements ?

b) **La restructuration**. Le collège unique est toujours bien en place, même s'il semble remis en question, tout au moins dans les idées de certains.. Quant au Lycée, beaucoup d'enseignants de Lycée ont compris très tôt, dès le milieu des années 1990 que la terminale C qui jusqu'alors préparait les élèves à une orientation scientifique avec la terminale D, était condamnée à terme. En effet, après "le Collège unique", l'ouverture du "savoir" au plus grand nombre, objectif de toute véritable démocratie, s'est faite en grande partie par l'augmentation des effectifs des classes de seconde dites "indifférenciées" des Lycées d'enseignement général. Cette évolution brutale à la fin des années 80 à conduit la classe de TC a devenir, progressivement, par la force des choses, une classe refuge des "bons élèves", quelques soient par ailleurs leurs aptitudes en Mathématiques ou en Physique. Elle fut taxée d'élitisme, appelée "voie royale" et sa suppression en 1994 apparut alors comme une nécessité.
Pour fixer les idées, rappelons la restructuration des sections qui s'est réalisée depuis 1989 dans le cadre de " la Rénovation des Lycées " et dont la plupart des applications perdurent en 2000. Cette réforme a d'abord généré une série L, bien conçue et équilibrée, qui permettait à un bon élève "littéraire" d'atteindre un excellent niveau de savoir, qu'il soit scolaire ou acquis dans son milieu d'origine. En Sciences, sous le prétexte de retarder le plus possible l'orientation des élèves, la diversification des filières prend la forme perverse de l'uniformité. Depuis la suppression de la TC en 1994, l'élève de TS (terminale scientifique regroupant les anciennes TC et TD[3]), pour atteindre un niveau de compétence identique dans les trois grandes disciplines scientifiques: S.V.T., Physique-Chimie et Mathématiques, est condamné au " bachotage". Ajoutons à cela que sa compétence doit égaler pratiquement celle de son collègue de la série L dans la plupart des disciplines littéraires: Français en première; puis, en terminale, dissertation en Philosophie, dissertation en Histoire-Géographie (même programme que les TL mais avec une heure de cours en moins bien sûr), enfin Première Langue étrangère

---

[3] En terminale D l'enseignement s'adresse aux élèves désireux de se diriger vers les sciences expérimentales ; les mathématiques enseignées sont adaptées à cette orientation.

à l'écrit. Il est alors évident que l'enseignement de spécialité en mathématiques de 2 heures par semaines ne peut changer la donne initiale : l'acquisition d'un savoir mathématique est remplacée par un apprentissage, souvent réduit à des "recettes". Quant aux élèves de TSE, série destinée aux futurs étudiants en sciences économiques, leur bagage mathématique se révèle insuffisant lorsqu'ils sont en compétition avec des élèves issus la section S dans un cursus de sciences économiques d'après bac.
Pouvait-on l'éviter ? Etait-il possible d'accompagner cette démocratisation du savoir d'une plus grande diversité des filières du baccalauréat mieux adaptées a la diversité des talents et en adéquations avec les besoins d'une économie tournée de plus en plus vers les hautes technologies aussi bien en physique en chimie et en biologie. ? La revalorisation des filières techniques a-t-elle était suffisante? . Après avoir constatés les problèmes, il n'est pas de mon ressort d'en donner ici les solutions.
Ma conclusion est qu'en définitive la massification des Lycées semble s'être réalisée au détriment d'une réelle démocratisation. J'entends par une réelle démocratisation, la possibilité pour chaque élève, quelque soit son milieu social d'origine, quelque soit l'établissement qu'il fréquente, du plus petit Lycée d'une agglomération de la France profonde au plus grand des Lycées d'une capitale régionale, de recevoir un enseignement suffisamment solide et lui permettant d'atteindre les objectifs correspondants à ses désirs et ses capacités, même si celles-ci sont élevées. Ce n'est plus le cas, je l'ai constaté dans ma pratique lors des dernières années du XX° siècle.
Cela dit, je suis très conscient que le problème de l'enseignement entre 16 et 18 ans, et au plus grand nombre, est difficile et dépasse de beaucoup l'hiatus que je viens de dénoncer entre les séries L et S. Il se pose dans la plupart des pays développés. Parmi les publication sur la question de la charnière Terminale-Postbac, je renvoie à l'ouvrage de Pierre LEGRAND[4]: "*Le Bac chez nous et ailleurs*" où l'on trouvera des réponses plus globales sur cette grande question.

c) **Le domaine des possibles**. La raison souvent avancée d'un cours d'Analyse réduit pour l'essentiel à une analyse algébrisée [5] est "la réelle difficulté des concepts rencontrés". Il n'est pas donc pas certain, si l'on ne remet pas en cause l'actuelle structure des 1° et second cycle de l'enseignement secondaire, que l'on puisse rétablir une certaine rationalité dans l'enseignement de l'analyse en terminale scientifique. Il n'y a pas actuellement de volonté politique de régler le problème dans ce sens, c'est pourquoi le travail qui suit ne peut être considéré comme destiné exclusivement au Lycéen de l'an 2000.

Il s'agit en fait d'un essai de démonstrations de certains théorèmes d'analyse élémentaire s'adressant à des débutants, dans le cadre d'un enseignement qui a pour ambition d'assurer la transition entre le Lycée actuel et l'Université. Comme il n'existe pas de structure pour cette transition[6] en France[7], on peut considérer que certains théorèmes qui suivent peuvent être abordés dès le Lycée et d'autre l'année suivante.
Les objectifs de ce travail sont donc la réalisation, en analyse, d'une liaison Lycée-Université et je pense que le contenu et les méthodes ne sont pas obsolètes lorsque je revois ce texte en Janvier 2007.

d) **La méthode** : **algorithmique**.

---

[4] P. Legrand fut doyen de l'Inspection Générale dans les années 80 et au début des années 90.
[5] Calcul des dérivées, des primitives par lecture inverse; calcul des termes consécutifs d'une suite récurrente ...
[6] On peut considérer que si la démocratisation des Lycées obligent un appauvrissement des contenus, la transition évoquée pourrait être comparée à une année de Terminale C au début des années 1980.
[7] Chez nos voisins Allemands, l'Abitur, équivalent de notre bac, se passe à 19 ans et les contenus sont évidemment, dans la séries scientifiques, plus approfondis qu'en France. Il faut préciser que les structures sont aussi très différentes. Citons un enseignement technique qui demeure très prisé des élèves et de haut niveau.

Je vais essayer de montrer dans ce texte que le choix des développement décimaux illimités (notée les DDI.) pour définir les réels est pertinent[8] et assure la cohérence des objectifs que j'ai annoncés, c'est à dire rétablir une certaine rationalité dans une première approche de l'enseignement de l'analyse.
Par ailleurs, si l'on désire conjuguer les développements algorithmiques avec quelques exemples de démonstrations, il est nécessaire de disposer d'une définition simple des réels, certes provisoire mais opérationnelle dans les problèmes. L'expérience m'a montrée[9] qu'il est raisonnable d'admettre la proposition "toute suite croissante et majorée converge" qui conduit à "une suite d'intervalles emboîtés définit un réel unique ". La représentation des nombres sur la droite géométrique favorise l'acquisition du sens de cette propriété. Par contre dire que R est caractérisé par l'axiome de la borne supérieure est une notion qui ne "passe pas" comme nous en avons fait l'expérience en 1972 lorsqu'on définissait l'intégrale de Riemann en TC à l'époque dite des "mathématiques modernes".

- Un autre problème, est de trouver le bon moment dans le cursus scolaire pour parler des limites[10] et avec quel degré d'approfondissement. Les concepts en analyse sont souvent difficiles ; ils doivent être dégagés progressivement en ménageant des étapes au-delà desquelles, l'élève, fut-il excellent, perdrait le sens. Ces erreurs ont été faites par le passé; par exemple avec les limites en ε, η, en 1962 ou l'intégrale de Riemann en 1972 comme borne supérieure des intégrales des fonctions en escaliers qui minorent f. Une voie moyenne est souvent préférée : s'en tenir à une interprétation qualitative de la limite en zéro et à propos de la dérivée ; je pense ici aux idées développées par le mathématicien américain d'origine française Serge Lang dans son ouvrage[11] bien connu "A first course of Calculus". Au contraire, dans la ligne que je me suis fixé, j'aborde une formalisation de la définition de la limite d'une suite ou d'une fonction en termes d'approximations[12] à 10^{-n}. L'avenir dira si cela est possible au Lycée ou plus tard. La difficulté des concepts exposés, de toute façon, demeurera longtemps encore sur de nombreux points; mais est-ce vraiment dramatique? Qui a saisi tout de suite, après leur construction en Bac+1, toute la richesses et la complexité des réels?
Parler de limite de suites ou de fonctions en TS sans pouvoir les utiliser dans le contexte d'une démarche rationnelle, comme c'est le cas actuellement au Lycée puisque nous ne disposons

---

[8] Dans son ouvrage à destination des enseignants, "Les notions de mathématiques de base dans l'enseignement du second degré" publié en 1964, Jacqueline Lelong -Ferrand, professeur à la faculté des sciences de Paris, développe ce choix.

[9] Jusqu'en 1998, les propositions "toute suite croissante et majorée de réels converge " et sa duale sont admises en TS (spécialité Math). Puis après une éclipse , nous retrouvons cette propriété dans les projets de ppogrammes pour 2002.

[10] Actuellement en l'an 2000, les limites en zéro ou en l'infini des suites (respectivement fonctions) de références sont admises. Parmi les suites de références, citons :

$$(\frac{1}{n}), (\frac{1}{n^2}), (\frac{1}{\sqrt{n}}), (q^n) \text{ avec } |q| < 1 \text{ en } 0$$

$$\text{et } (n), (n^2), (n^3), \frac{1}{n}, (\sqrt{n}) \text{ en } +\infty$$

[11] Ouvrage destiné au Collège universitaire qui aux Etats- Unis correspond approximativement à la terminale en France.

[12] Voir le chapitre I de cette étude.

que de conditions suffisantes[13], c'est certes respecter une progression prudente, mais au risque de créer des comportements purement algébriques qui vont perdurer dans l'après-bac. Il serait irréaliste de prétendre que cette définition de la limite se justifie par la seule résolution de quelques exemples tel $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=3$, pour ensuite utiliser systématiquement les théorèmes dits "de stabilité" ou le théorème des gendarmes dans le traitement de tous les problèmes de limites.

Ce qui importe dans la charnière "Lycée -Université", c'est de montrer que la limite définit en termes d'approximation à 10^{-n} permet "d'ébaucher" un cours d'analyse ou l'intuition se conjugue avec la rationalité, c'est à dire "faire des mathématiques ". Il est certain qu'actuellement au lycée, l'élève, lors des travaux pratiques utilisant les résultats admis, déduit et raisonne logiquement. Mais si l'on entend par "démontrer " : montrer les raisons de la vérité des propositions, je dirai qu'il ne "démontre" pas dans la recherche d'un exercice. Or la démonstration est "constitutive" des mathématiques.

Il ne s'agit que de poser les premières pierres. Tout d'abord en "démontrant" les comportements des suites et fonctions[14] "dites de références en zéro", ou plus généralement des fonctions usuelles, en un point réel ou à l'infini. Toujours dans l'ordre de la démonstration il est possible de prouver, pour l'exemple, un ou deux théorèmes de stabilité sur la limite d'une somme ou d'un quotient. C'est à mon sens une manière efficace de marquer que l'analyse n'est pas une activité réductible uniquement à des recettes ou à l'application d'algorithmes dont le principe est admis systématiquement et le sens souvent évacué.

Il s'agit d'utiliser une formalisation de la convergence pour provoquer quelques "ruptures" avec les pratiques du lycéen qui sont souvent réduites à celles d'une analyse algébrisée. Et ceci peut se faire à l'occasion de la démonstration de quelques théorèmes fondamentaux de l'analyse élémentaire.

Bien entendu, un tel discours ne doit pas être tenu à tous les élèves du Lycées. Dans l'état actuel, il s'adresse à une structure de transition qui serait destinée en priorité à accueillir les futurs étudiants en mathématiques, physique ou en classe préparatoire.

La démonstration de ces théorèmes peut être une démarche " volontariste": le " ça se voit sur le graphique " n'est plus déclaré suffisant pour justifier tous les énoncés. Dans le même temps, il est tout indiqué, lorsque c'est possible, de justifier la nécessité d'une démonstration, dans ce cours ou nécessairement l'élève admet et continuera d'admettre beaucoup de propriétés. Trop d'étudiants après le baccalauréat on une réaction de "curiosité " devant cette "étrange activité" qui consiste à prouver un énoncé.

Enfin, il est nécessaire de s'assurer que la motivation pour établir ces démonstrations, en nombre nécessairement limité, soit suffisamment forte. D'une part les concepts choisis pour être définis doivent conduire à des conséquences théoriques importantes[15] et les nouvelles propriétés établies suffisamment riches en retombées pour la résolution des problèmes.

Quant à la méthode, elle est pour l'essentiel algorithmique et s'appuie largement sur l'utilisation des calculatrices programmables ou des ordinateurs. En effet l'analyse quantitative

---

[13] Il n'est pas certain, l'expérience le montre, qu'il soit plus facile pour l'élève de réaliser les majorations que nécessitent ces conditions suffisantes pour montrer $\lim_{n\to\infty}(\frac{n+2}{n-4})=1$, que de résoudre dans N des inéquations du type: $\left|\frac{n+2}{n-4}-1\right|\leq 10^{-m}$.

[14] Ne disposant pas des développements en série des fonctions transcendantes comme les fonctions circulaires, logarithmes ou exponentielles, les résultats sur les limites de ces fonctions seront obtenues par une intérprétation géométrique ou termes d'aires.

[15] Dans le travail qui suit j'évoque la démonstration de quelques résultats sur les fonctions continues sur un intervalles et sur le calcul différentiel et intégral.

où "majorer, minorer, encadrer" selon Dieudonné est le fil directeur de ce cours. Les calculs réalisés par l'ordinateur ou la calculatrice permettent des conjectures ou constituent la finalité de l'activité comme dans l'approche des solutions d'une équation. A mon sens celle-ci doit rester une activité rationnelle, donc l'organigramme d'un programme utilisé doit être compris par l'élève ou l'étudiant. Ces routines, comme le calcul des termes d'une suite ou la valeur approchée d'une intégrale, sont suffisamment simples pour faire l'objet d'un programme que l'élève traduira dans le langage de sa calculatrice ou de son ordinateur. Certains considèrent cette étape comme dépassée, notamment avec la mise en circulation des outils[16] qui pratiquent le calcul formel. Je ne partage pas ce point de vue pour la formation des futurs scientifiques, car l'expérience de ces dernières années a montrée que l'outil est devenu "mythique" pour beaucoup de jeunes utilisateurs. Cette attitude renforce l'aspect "recettes de cuisine " auquel la dérive des programmes nous conduit depuis dix ans.

[16] Citons la TI 92 chez Texas instrument ou son équivalente chez Casio

CHAPITRE I
LES NOMBRES REELS

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Liminaire.

La notion de nombres réels est liée intuitivement et historiquement à la mesure des grandeurs, en premier lieu la mesure des longueurs. On peut donc dans un premier temps, au collège par exemple, rester à ce niveau intuitif et dire que les réels sont les abscisses des points d'une droite orientée. Les propriétés de ces nombres liées au problème de la mesure découlent alors de celles qu'on attribue à l'ensemble appelé "droite " en géométrie. Notre objectif est ici un peu plus ambitieux : nous allons construire, à partir des nombres entiers, et en liaison avec un axe orienté et gradué, des nombres "écrits dans le système décimal" que nous appellerons aussi "nombres réels". La cohérence nous imposera, une fois réalisée cette construction, d'étudier de plus près la notion de "droite géométrique". Le problème sera alors d'essayer de démontrer qu'elle est isomorphe à "la droite numérique" que nous allons réaliser maintenant.
D'ailleurs dans la suite de ses études l'étudiant va rencontrer de nombreuses autres constructions et qui conduisent à des ensembles de nombres appelés aussi "nombres réels". D'autres procédés font appel aux limites de suites croissantes et majorées de rationnels (définition de Cantor) ou à la relation d'équivalence sur "les suites de rationnels dites de Cauchy" basée sur la notion de distance, ou par les coupures liées à la notion de relation d'ordre par la méthode de Dedekind. Le second problème de cohérence théorique, lié au premier mais qui n'a pas sa place ici dans une première approche, serait alors de démontrer que tous ces "ensembles" sont isomorphes en tant que corps commutatifs totalement ordonnés et vérifiant les axiomes d'Archimède et de Cantor (une suite d'intervalles emboîtés défini un réel unique).

Avertissement.

Les développements qui suivent sont une étude de faisabilité : est-il pertinent de définir un réel par son développement décimal illimité et en relation avec un point de la droite? de montrer que "limite" et "continuité" peuvent être définies en termes de valeurs approchés à 10^{-n} près ? Si ces définitions, qui ne sont pas de simples conditions suffisantes, sont accessibles aux débutants, elles participeront à la "*démonstration*" de quelques uns des théorèmes d'Analyse élémentaire afin de réintroduire plus de rationalité dans notre enseignement. Il ne s'agit donc nullement d'un cours prêt à être appliqué tel quel, tout ce qui est écrit dans la suite n'est pas nécessairement à traiter avec l'élève, l'étudiant ou plus généralement le débutant en analyse élémentaire ; le partage du cours entre l'avant et l'après baccalauréat doit faire éventuellement l'objet d'un contrat pédagogique précis. Ce n'est pas ici l'objectif poursuivi.

BREF RAPPEL SUR LA MESURE DES GRANDEURS

Lorsque le mathématicien grec Eudoxe[17] développe et étend sa théorie des proportions pour donner "un sens" à la racine carrée d'un nombre positif, c'est pour résoudre un problème de *mesure de longueurs* des segments. Ces racines carrées permettent aux grecs de donner la mesure de tous les segments que l'on peut construire à la règle et au compas et l'utilisation du théorème de Thalès, à partir d'un segment choisi comme unité. Cependant la mesure de π la circonférence du cercle de rayon 1/2 n'est pas la racine d'un rationnel ni même solution d'une équation polynôme à coefficients entiers. L'algorithme utilisé par Archimède, s'il est plus complexe, donne un encadrement remarquable de π qu'il obtient par les mesures des polygones inscrits et circonscrits.
Les considérations intuitives sur la mesure des longueurs, des aires, des volumes, des températures, des pressions, des sons, de la radio-activité nous conduisent à constater que l'on ne peut comparer que des grandeurs de ***même espèce***. De plus cette démarche suppose qu'il existe des grandeurs indéfiniment divisibles, qui présente une *certaine forme de continuité.*
Rappelons brièvement les propriétés communes des grandeurs d'une même espèce

P_0 : Les grandeurs d'une espèce considérée sont dites "mesurables" si on peut les ajouter, cette opération ayant les propriétés suivantes :

P_1: L'addition est commutative et admet un élément neutre appelé grandeur nulle.

P_2: $A \geq B$ équivaut à l'existence d'une grandeur C telle que $A + B = C$; donc la grandeur nulle est la plus petite.

P_3 : $A + B = A + C \Rightarrow B = C$. Ainsi la différence A-B existe si $A \geq B$.

Alors la grandeur n.A prend un sens pour $n \in N$: c'est la somme de n grandeurs égales à A. De plus on obtient les relations : $A \geq B \Rightarrow nA \geq nB$ et $n, p \in N \quad n \geq p \Rightarrow nA \geq pA$.

Les conditions ci-dessus permettent la mesure d'une grandeur mesurable donnée *par encadrement*. Ayant choisi une grandeur non nulle U de la même espèce que l'on appelle unité ; on recherche alors à encadrer la grandeur à mesurer X par deux multiples consécutifs de U. Si l'on obtient la double inégalité

$$nU \leq X < (n+1)U$$

on dira que l'entier n est *la mesure approchée à une unité près par défaut* de X.
Remarquons que cette "mesure approchée" n'existe que si tous les entiers n vérifiant $nU \leq X$ admettent un plus grand élément : il est donc nécessaire d'admettre que les grandeurs mesurables vérifient "*l'axiome d'Archimède* " c'est à dire : pour tout couple (U,X) de grandeurs de même espèce il existe un entier p tel que $pU > X$.
Plus U est petite plus la valeur approchée obtenue est précise, ceci peut être obtenu en fractionnant l'unité initiale U. La réalisation exige que l'on puisse diviser chaque grandeur mesurable en p parties égales (p > 1). Nous admettrons donc que celles ci vérifient aussi "*l'axiome de division*".
Le physicien ou le biologiste ou tout autre expérimentateur le plus souvent utilise un appareil qui limite la précision de sa mesure et rend illusoire la connaissance de la valeur exacte de celle-ci : citons la largeur de l'aiguille, la finesse de la graduation, ajoutons les phénomènes physiques perturbateurs dont la correction est difficile, sinon impossible. Dans certaines

[17] **EUDOXE , -408/-355**. Disciple de Platon, astronome et philosophe. La découverte, par les Pythagoriciens, de nombres incommensurables l'amène à y répondre par une puissante théorie des proportions qu' Euclide utilisera dans le livre V " Des éléments". La racine carré d'un nombre est définie par toutes les fractions qui lui sont inférieures. Eudoxe est aussi l'initiateur de la méthode d'exhaustion qui lui permettra, le calcul d'aires et de volumes, méthode que reprendra et affinera Archimède.

situations comme la structure corpusculaire de la matière et de l'énergie, la notion de valeur exacte est dépourvue de signification. En conclusion dans le meilleur des cas, nous ne pouvons qu'obtenir des *valeurs approchées par excès ou par défaut des mesures des grandeurs physiques. Cependant dans une volonté d'aboutissement, de prolongement vers un état idéal l'expérimentateur raisonne ainsi :* si les instruments deviennent de plus en plus précis, si les erreurs sont de plus en plus évitables, *la valeur exacte est concevable.* Le mathématicien lui répond que cette valeur exacte ne peut-être par définition que la limite commune des valeurs approchées par défaut et par excès des mesures obtenues en perfectionnant toujours plus l'instrument de mesure et en faisant abstraction des phénomènes physiques qui perturbent toute mesure. Soit la suite (x_n) des valeurs approchées par défaut obtenues par une suite d'instruments de plus en plus précis, elle est croissante et majorée par une quelconque valeur approchée par excès, de même la suite (x'_n) des valeurs approchées par excès est décroissante et minorée par un x_n. Il en conclut :

1° $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq x_{n+1} \leq x'_{n+1} \leq x'_n$

2° $x'_n - x_n$ peut être rendue aussi petite que l'on veut.

Pour pouvoir indiquer la *valeur exacte de la mesure* par un nombre, il faut donc étendre la notion de nombre de façon que les conditions 1 et 2 ci-dessus définissent un nombre x et un seul vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq x \leq x'_n$. **Ce nombre x sera considéré comme la mesure exacte de cette grandeur.** Cette double condition est appelée" *l'axiome de Cantor"*[18] . Cette construction d'une suite d'intervalles emboîtés $\left[x_n, x'_n\right]$ détermine[19] un réel unique x. Les nombres ainsi obtenus seront appelés des " nombres réels".

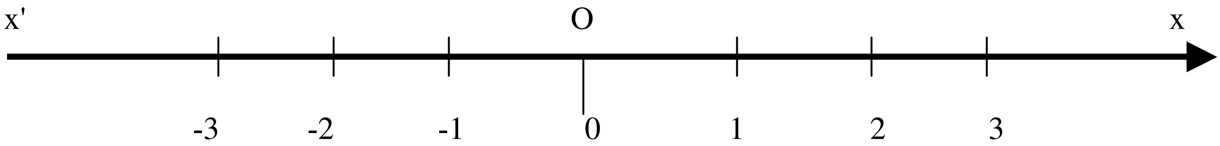
Nous allons ***esquisser*** pour le débutant en analyse une construction sommaire de ces nombres en utilisant partiellement la théorie des développements décimaux illimités, cette méthode paraissant la mieux adapté au cursus des élèves qui travaillent depuis l'école primaire avec les décimaux, et les retrouvent journellement sur leurs calculatrices. Le point de départ est concret et les calculs algébriques sont accompagnés d'une visualisation des entiers puis des décimaux sur une droite géométrique orientée et graduée, ce que les élèves pratiquent depuis le Collège.

I LA GENESE DES DDI.

I NOMBRES DECIMAUX ET DEVELOPPEMENTS DECIMAUX ILLIMITES.

§1 La droite numérique intuitive.

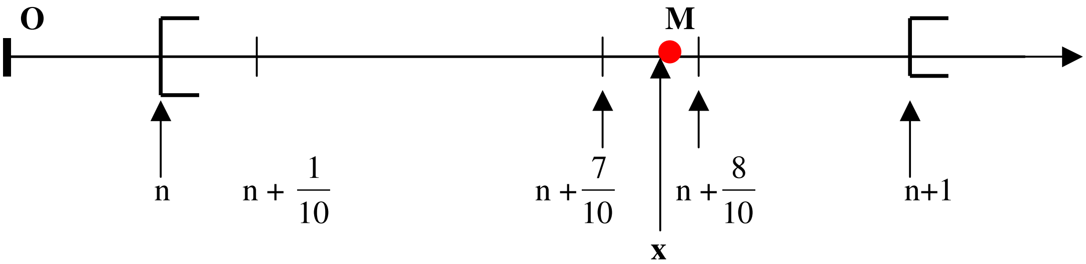
Soit une droite *D* au sens de la géométrie euclidienne, c'est un ensemble de points dont les propriétés sont connues dès le Collège. On choisit sur *D* un point origine et un vecteur unité (de longueur 1). C'est alors un axe orienté et gradué : figure ci dessus



La représentation des nombres entiers relatifs est évidente. Pour représenter les rationnels, décimaux ou non, il faut admettre qu'on peut diviser un segment en k segments de même longueur. C'est en troisième que les élèves apprennent la construction de cette division

[18] Ces suites sont aussi les bornes d'une "suite d'intervalles emboîtés".
[19] Nous le démontrerons au chapitre suivant sur les suites

régulière d'un segment comme application du théorème de Thalès, on dira ici : *l'axiome de division*. La représentation des nombres par les points d'une droite permet de visualiser de nombreuses propriétés : addition, ordre, nombres négatifs, encadrements, distance de deux nombres et valeur absolue d'un nombre, intervalles centrés ou non. Pour l'instant nous ne pouvons justifier autrement que par des considérations géométriques intuitives l'existence de nombres non rationnels nécessaires à la mesure exacte des grandeurs. Rappelons la construction géométrique du point de la droite *D* d'abscisse $\sqrt{2}$ diagonale du carré de côté un, ainsi que celle du point P d'abscisse π obtenue en déroulant sur la droite un cercle de rayon 1/2 . Il est donc nécessaire de donner une approche plus générale de ces nombres, et de plus, opérante dans le cours d'analyse.
Le procédé que nous allons utiliser s'appuie simultanément sur la géométrie de la droite et la notion de valeurs approchées décimales d'un nombre. Précisons ici que cette notion de valeurs approchées est très utile à l'élève dans de nombreux domaines, notamment dans toutes les sciences expérimentales.
Problème . Calcul des valeurs approchées de la longueur d'un segment de la droite.
Tout en restant dans le cadre d'une géométrie intuitive de la droite, **on peut visualiser l'approximation décimale par défaut de la longueur x du segment [OM]**



On place sur la demi-droite les entiers naturels, et l'image de l'entier n partie entière du nombre positif x**.** Ce nombre x appartient nécessairement à un intervalle $[n;n+1[$.
Divisons cet intervalle en 10 intervalles égaux : x appartient à l'un de ces sous intervalles, ainsi $x \in \left[n+\frac{a_1}{10};n+\frac{a_1+1}{10}\right[$, l'entier a_1 est la première décimale de x après la virgule, son écriture décimale commencera ainsi : $x = n,a_1$ ….et le décimal n,a_1 est la V.A. décimale à 10^{-1} près par défaut de x.
Ensuite on partage ce petit intervalle semi-ouvert en 10 intervalles de longueur égale à $\frac{1}{100}=10^{-2}$, ceci nous fourni la décimale de rang 2 de x qui s'écrit $x = n,a_1a_2......$
En continuant le procédé, nous trouvons après k divisions successives : $x=n,a_1a_2.....a_k.....$ où le décimal $n,a_1a_2.....a_k = n+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+....+\frac{a_k}{10^k}$ est une valeur approchée de **x** à 10^{-k} près par défaut.
Ainsi les décimaux relatifs apparaissent naturellement dans le problème de la mesure d'une longueur par approximation. En réduisant au même dénominateur, celui de la puissance la plus élevée de 10 dans l'écriture ci-dessus, on pose :

Définition . Un nombre décimal A est une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10, c'est donc un rationnel qui peut être représenté par une fraction décimale $\frac{a}{10^n}=a10^{-n}$ où $a\in Z$ et $n\in N$.

Par exemple : $\frac{14142}{10^4} = 14142.10^{-4}$; dans le système décimal la notation usuelle est 1,4142.

De même : $\frac{14142}{10^6} = 14142.10^{-6} = 0{,}014142$.

Inversement un décimal donné est représenté par une infinité de fractions décimales puisque $\frac{a}{10^n} = \frac{a10^p}{10^{n+p}}$; ainsi $\frac{14142}{10^4} = \frac{1414200}{10^6}$ se traduit en écriture décimale par : 1,4142 = 1,414200.

Les fraction décimales "équivalentes" s'écrivent en ajoutant ou en retranchant des zéros à droite de la dernière décimale non nulle : $\frac{a}{10^n} \approx \frac{10^p a}{10^{n+p}}$

Par contre chaque nombre décimal positif est représenté de façon unique par une fraction décimale : $\frac{a}{10^n}$, $a \in \mathbb{N}$ où a est non divisible par 10.

On montre que l'ensemble des nombres décimaux D est un sous anneaux du corps Q des rationnels sont des propriétés supposées connues ici.

Propriété . Un décimal A s'écrit de façon unique A = $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}$ où $a_0 = E(A)$ est la partie entière de A (c'est à dire le seul entier relatif vérifiant $a_0 \le A < a_0 + 1$) et $a_1, a_2, \ldots, a_n$.des entiers appartenant à $\{0,1,2,\ldots,9\}$. Ainsi le décimal A s'écrit $a_0, a_1a_2\ldots\ldots a_n$, c'est la somme d'un entier relatif a_0 et d'un nombre décimal α positif , $0 \le \alpha < 1$, avec $\alpha = 0, a_1a_2\ldots a_n$.

Par exemple 21,2578481 est un décimal positif et $[-21],2578481$ est le nombre usuel $-21+0{,}2578481$. Remarquons que cette représentation des décimaux relatifs est celle utilisée dans les tables de logarithmes décimaux, la partie décimale étant appelé "mantisse" .

Lorsque dans le décimal $x = a.10^{-n}$, $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$, c'est un décimal relatif. L'ensemble des décimaux relatifs est noté D . C'est une partie de Q, stable pour l'addition et le multiplication[20].

Définition. Tout nombre rationnel qui s'écrit sous la forme $a.10^{-n}$ *avec* $a \in \mathbb{Z}$ *et* $n \in\in \mathbb{Z}$ est appelé un nombre décimal relatif. Leur ensemble D est inclus dans Q.

OBJECTIF. Notre contrat, dans ce chapitre, est la connaissance de tous les nombres par leurs développements décimaux. Expérimentons cette recherche des développements dans deux exemples très significatifs par leur antériorité pour l'élève : celui d'un quotient et d'une racine carrée. Nous allons alors constater que ceci nous conduit à considérer des développements décimaux illimités.

La division des entiers

Soit le rationnel $r = -\frac{19}{7} = -3 + \frac{2}{7}$. ; pratiquons l'algorithme de la division de 2 par 7 :

2	7
60	0,285714…….
40	
50	
10	
30	
2	

[20] Il n'est pas nécessaire à ce stade de savoir que D est un sous anneau de Q..

Ainsi, la nécessaire périodicité des restes dans la division habituelle permet de conjecturer que le développement décimal de 2/7 n'est pas fini et s'écrit 0,285714 285714….. donc le développement décimal de r est [–3], 285714285714…. , il est non fini, mais périodique, la période est 285714.

L'extraction de la racine carrée. Je cite ici cet algorithme sans en rappeler l'explication :

2										1,	4	1	4	2	1				
-1										2	4 *	4=	96						
1	0	0								2	8	1*	1=	2	8	1			
-	9	6								2	8	2	4*	4=	1	1	2	9	6
		4	0	0						2	8	2	8	2*	2=	56	56	4	
	-	2	8	1						2	8	2	8	4	1*	1=	28	28	41
		1	1	9	0	0													
	-	1	1	2	9	6													
		0	0	6	0	4	0	0											
			-	5	6	5	6	4											
				0	3	8	3	6	0	0									

Donc $\sqrt{2} = 1{,}41421.......$, et le décimal 1,41421 est une *V.A. décimale de* $\sqrt{2}$ *à* 10^{-5} *près.*

En utilisant une calculatrice performante obtient : $\sqrt{2} = 1{,}4142135623733.......$

En utilisant des logiciels encore plus performants comme "DERIVE" on obtient un : $\sqrt{2}$ =1,41421356237300950488016887242096980785696718753769448073176679737990732477846210703885003875334327641572……..qui compte 100 décimales. Ce résultat permet de conjecturer que non seulement le développement décimal est illimité, mais aussi qu'aucune périodicité n'apparaît. Ceci nous autorise à poser la définition suivante :

CONCLUSION. Les algorithmes de la division et de l'extraction de la racine carrée fournissent deux exemples où, potentiellement, on peut conjecturer que l'algorithme peut se poursuivre indéfiniment en fournissant le D.D.I d'un nombre, rationnel ou non.. Il est donc assez naturel de dire que tout D.D.I. définit un nombre. Nous allons brièvement justifier ce point de vue concret et familier aux élèves et jeunes étudiants par **l'*esquisse d'une théorie,*** l'objectif n'est pas un exposé exhaustif sur les nombres réels.

Définition 1 On appellera développement décimal illimité (en abrégé D.D.I.) une suite infinie de nombres entiers $a_0, a_1 a_2 ...... a_n ......$**dont le premier terme** a_0 **est un entier relatif quelconque** et les termes suivants a_i $(i \geq 1)$ des décimales entières vérifiant $0 \leq a_i \leq 9$.
On notera $A = a_0, a_1 a_2 ...... a_n ....$ Soit Δ l'ensemble des D.D.I.
Ainsi le D.D.I. A est défini par la suite $(A_n)_{n \in N}$ où A_n est le décimal $a_0, a_1 a_2 .... a_n$.

La suite $(A_n)_{n \in N}$ est une suite croissante de nombres décimaux.

Développements propre et impropre d'un décimal (ou représentation régulière et non régulière)

Rappelons la définition choisie pour la convergence des suites de rationnels.

Définition 2. La suite de rationnels (u_n) **converge vers le rationnel** ***l*** *dans Q* quand n tend vers l'infini si et seulement si : pour tout entier m donné, il existe un entier p dépendant de m tel que **"**u_n **est une V.A. de** ***l*** **à** 10^{-m} **près dès que son rang n égale ou dépasse le rang p."**

C'est à dire : $\ell - 10^{-m} \le u_n \le \ell + 10^{-m}$ dès que $n \ge p$. Ou encore : $|u_n - \ell| \le 10^{-m}$ dès que $n \ge p$ .On note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ ou $\lim(u_n) = \ell$

Soit le D.D.I. 1,2320000…. ne comportant que des 0 à partir de la décimale de rang quatre, on le met en relation avec le D.D.I. égal à 1,2319999……ne comportant que la décimale 9 à partir du rang quatre.

Plus généralement soit le décimal positif :

$A = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_n}{10^n} = a_0, a_1 a_2 .... a_n 00000...$ $a_i \in \{0,1,2,....9\}$ et $a_n \ne 0$ et soit la suite pour $k > n : (A_k)$ où A_k est le décimal $A_k = a_0, a_1 a_2 .... a_n 00000$ avec k décimales après la virgule. Par construction de A : $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$

Soit le DDI défini par $A' = a_0, a_1 a_2 .... a_{n-1}(a_n - 1)9999...$

Pour $k > n$, le décimal $A'_k = a_0, a_1 ....(a_n - 1)999...9$ où la dernière décimale de rang k est 9.

Par construction de A' : $\lim\limits_{k\to\infty} A'_k = A'$

Donc $A = a_0 + \sum\limits_{i=1}^{i=n} \frac{a_i}{10^i}$ et $A' = a_0 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{10^i} + \frac{a_n}{10^n} - \frac{1}{10^n} + \frac{9}{10^{n+1}} + \frac{9}{10^{n+2}} + ...$

Ainsi dans Q : $A' = a_0 + \sum\limits_{i=1}^{i=n} \frac{a_i}{10^i} - \frac{1}{10^n} + \frac{9}{10^n} U$ où $U = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + ... + \frac{1}{10^p} + ...$

Soit $A' = a_0 + \sum\limits_{i=1}^{i=n} \frac{a_i}{10^i} - \frac{1}{10^n} + \frac{9}{10^n} U = A - \frac{1}{10^n} + \frac{9}{10^n} U$ où U est la somme des termes d'une suite géométrique de raison 1/10 donc $U = \dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{9}$ et $A' = a_0 + \sum\limits_{i=1}^{i=n} \frac{a_i}{10^i} - \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^n} = A$

A sera dit le développement illimité "propre" du décimal A (ou la représentation régulière) et A' sera son développement décimal impropre.

Propriété . Tout nombre décimal admet une représentation et une seule par un D.D.I. ne possédant qu'un nombre fini de décimales non nulles. On notera Δ_0 l'ensemble de ces D.D.I. IL y a bijection entre D l'ensemble des décimaux et Δ_0. (voir le rappel ci-dessus)

Appelons Δ_9 l'ensemble des développement décimaux illimités ne comportant que des 9 à partir d'un certain rang. Ainsi le D.D.I. 1,2319999…… ne comportant que des 9 à partir de la décimale de rang quatre, on le met en relation avec le D.D.I. égal à 1,2320000….. Plus généralement considérons $A' = a_0 a_1 a_2 ... a_n 999...$ un élément de Δ_9 tel que si $i > n$ alors $a_i = 9$.

On lui fait correspondre l'élément A de Δ_0 définit de façon unique par :

$A = a_0, a_1 a_2 ... a_n b_{n+1} 00000....$ avec $b_{n+1} = a_n + 1$ (ainsi à 1,2319999…. correspond le décimal 1, 2320000..). Cette application φ de Δ_9 dans Δ_0 est une de façon évidente une bijection.

Dans le cadre d'un exposé élémentaire, dans le contexte de l'apprentissage progressif d'un concept, nous admettrons le théorème suivant :

Théorème.

I. Si x est un rationnel, **Alors** il existe un DDI de Δ, $A = (A_n)$, **périodique** (càd la suite $(a_n)_{n\ge1}$ est périodique) et dans Q on a $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = x$. Si x est décimal la période est 0.

II Si deux éléments distincts $A=(A_n)$ et $A'=(A'_n)$ de Δ sont tels que dans Q , $\lim_{n\to\infty}(A_n - A'_n)=0$ **Alors** $A = a_0,a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n999\ldots9\ldots$ et $A' = a_0,a_1a_2\ldots a_{n-1}(a_n+1)000\ldots0\ldots$ et (A_n) et (A'_n) **converge dans Q vers le même décimal x** (Rem :la décimale a_n peut figurer dans l'entier a_0). A est le développement impropre de x et A' le développement propre de x.

III Si deux éléments A et A' de Δ tels que (A_n) et (A'_n) converge dans Q vers le même rationnel x, **Alors** A = A' (c à d $\forall n\in N \;\; a_n = b_n$), ou bien $A \neq A'$ et x est un décimal et a et a' sont les respectivement les développements propre et impropre de x.

IV. Si A est un DDI périodique **Alors** la suite (A_n) converge dans Q vers un nombre rationnel.

V. Si A est un DDI tel que (A_n) converge dans Q **Alors** A est périodique

On voit donc que dans l'ensemble Q la seule manière pour que deux DDI A et A' définissent le même nombre est qu'ils soient respectivement les développements propre et impropre d'un même décimal. On dira alors que A et A' sont équivalents si et seulement si $\lim_{n\to\infty}(A_n - A'_n)=0$.

Dans un exposé élémentaire, nous ne définirons pas R comme l'ensemble quotient de Δ par cette relation d'équivalence.

II DEFINITION DES REELS

I DEFINITION DES REELS

Définition 3 *On appelle nombre réel un développement décimal illimité qui ne possèdent pas que des décimales égales à 9 à partir d'un certain rang.*

L'ensemble R des nombres réels est donc $\Delta - \Delta_9$**. Les éléments de** Δ_0 **seront identifiés avec les nombres décimaux correspondants et les éléments de** Δ_9 **seront considérés comme *des développements impropres* des nombres décimaux correspondants.**

Ainsi, du point de vue de la représentation décimale, on distingue deux types de réels : En utilisant le théorème en cinq points admis au paragraphe I sur la représentation des décimaux et des rationnels

Propriété 1°) *Les nombres décimaux ordinaires* qui admettent chacun deux représentations par des D.D.I. : l'une qui sera dite "*régulière*"(ou propre) , par un élément de Δ_0 , l'autre *irrégulière(ou impropre),* par un élément de Δ_9 .

2°) *Les nombres décimaux illimités* qui sont représentés par un seul D.D.I., n'appartenant ni à Δ_0, ni à Δ_9 . Si leur DDI est périodique il s'agit de nombres rationnels non décimaux. Si leur DDI n'est pas périodique, ce sont des nombres irrationnels. D'où le schéma suivant :

Les Irrationnels ont un DDI non périodique

R

Q\ D non décimaux : un DDI périodique

Les rationnels Q

D décimaux : 2 DDI, propre et impropre

Définition 4. L 'égalité dans R découle de la définition : soient deux réels $A=(A_n)$ et $B=(B_n)$ par définition : $A = B \Leftrightarrow \forall n \in N \quad a_n = b_n$ en d'autres termes toutes les décimales de même rang de A et B sont égales.

Définition 5. Soient les réels, $A=(A_n)$ et $B=(B_n)$, alors :

$$"A < B \Leftrightarrow A \neq B \text{ et pour la première décimale de même rang inégale on a } a_n < b_n"$$

$$"A \leq B \Leftrightarrow A = B \quad \text{ou} \quad A < B"$$

Pour comparer les rationnels positifs $\frac{17}{20}$ et $\frac{45}{53}$, on peut pratiquer la réduction au même dénominateur, on obtient les fractions $\frac{901}{1060}$ et $\frac{900}{1060}$ ce qui permet d'affirmer que le premier est le plus grand. Si on recherche leur développement décimal respectif par la pratique de la division "bien connue" des élèves ou par lecture sur leur calculatrice, on obtient en arrêtant la division 5 chiffres après la virgule:

$$\frac{17}{20} = 0{,}85000\ldots.. \text{ pour le décimal et } \frac{45}{53} = 0{,}84905\ldots \text{pour le rationnel non décimal.}$$

Nous constatons que les premières décimales sont égales et les secondes diffèrent, de plus 5 > 4 coïncident ici avec $\frac{17}{20} > \frac{45}{53}$ et les fractions différent de moins de $\frac{1}{10^{-2}}$, 2 étant le rang de la première décimale différente. Mais des décimaux très voisins peuvent avoir leurs premières décimales distinctes. Soient les nombres décimaux x et y tels que :
x = 0,299985 et y = 0,3000089. Ces nombres x et y diffèrent de moins de 2×10^{-5}, en effet : $0{,}29999 \leq x \leq y \leq 0{,}30001$. Ainsi x et y sont très voisins, cependant leurs cinq premières décimales sont différentes. La raison de ceci peut-être illustrée par des considérations géométriques simples.

Il est clair sur la figure que x et y sont de part et d'autre et très voisin de la borne d'un intervalle de la subdivision $\left[\frac{p}{10^k};\frac{p+1}{10^k}\right[$; ici

$0,29999 \in [0,2\ ;\ 0,3[$, *et* $0,300010 \in [0,3\ ;0,4[$.

Il est aisé de démontrer que cet ordre lexicographique est c'est une relation d'ordre, il est total : si A et B sont décimaux c'est évident. S'il ne sont pas décimaux et distincts, toutes les décimales de même rang ne sont pas égales, la première qui les différencie donne l'ordre. Nous avons introduit les développements décimaux des rationnels à partir de l'axiome de division sur la droite orientée et graduée ; on peut démontrer par la suite que l'ordre défini sur $\Delta - \Delta_9$ ci-dessus est compatible avec l'ordre naturel sur la droite.

II VALEURS APPROCHEES D'UN REEL

Définition 6. Soit un réel A, il est déterminé par son D.D.I. $A = a_0, a_1a_2......a_n....... = (A_n)_n$
En supprimant toutes les décimales de rang strictement supérieur à n on obtient le décimal $A_n = a_0, a_1a_2......a_n$ appelé ***"le développement décimal d'ordre n de A"* : c'est *"la valeur approchée décimale unique de A à*** 10^{-n} ***près par défaut."***, c'est à dire l'unique décimal vérifiant la double inégalité : $A_n \le A < A_n + 10^{-n}$.

En extrayant la racine de 2, si l'on s'arrête à la sixième décimale, on obtient : 1,414213 ; c'est *la valeur approchée décimale d'ordre 6 de* $\sqrt{2}$ et $1,414213 \le \sqrt{2} < 1,414214$ donc 1,414213 donnent les 6 premières décimales du réel $\sqrt{2}$.
Plus généralement, il résulte de la définition de A et de l'ordre choisi dans R l'inégalité $A_n \le A < A_n + 10^{-n}$, traduisant que A_n est une V.A décimale par défaut à 10^{-n} près de A. En effet, le réel $A10^n$ est compris entre deux entiers consécutifs uniques ; c'est à dire, il existe un entier unique A_n10^n tel que : $A_n10^n \le A10^n < A_n10^n + 1$ où les nombres qui encadrent le réel $A10^n$ sont des entiers consécutifs ; d'où leur unicité et par suite l'unicité de du décimal A_n.
Il est parfois nécessaire d'élargir *la notion de valeur décimale approchée* ou *développement décimal d'ordre n* d'un réel, notamment pour faciliter certaines démonstrations sur les nombres réels en affaiblissant l'unicité constatée sur chaque A_n de la définition.

Définition.7 Plus généralement, nous dirons qu'un *nombre décimal* C_n[21] est *une valeur approchée du nombre réel A à moins de* 10^{-n} *près* s'il vérifie la double inégalité :

$$C_n - 10^{-n} \le A \le C_n + 10^{-n} \text{ qui équivaut à } |A - C_n| \le 10^{-n}$$

Propriété. Pour que deux réels A et B soient égaux il faut et il suffit que pour chaque valeur de l'entier n, ils admettent la même valeur approchée décimale $\mathbf{C_n}$ à moins de 10^{-n} près.

Soient A et B: $\forall n \in N \quad C_n - 10^{-n} \le A \le C_n + 10^{-n}$ et $C_n - 10^{-n} \le B \le C_n + 10^{-n}$

Des inégalités $A_n \le A < A_n + 10^{-n}$ et $B_n \le B < B_n + 10^{-n}$, on déduit : $A_n \le C_n + 10^{-n}$ et $B_n + 10^{-n} > C_n - 10^{-n}$. Donc en majorant C_n par $B_n + 2.10^{-n}$

il vient pour A_n : $A_n < B_n + 3.10^{-n} < B_n + 10^{1-n}$ en majorant 3 par10.

L'ordre étant total dans R, on peut supposer que $A \ge B$, et nous avons alors la disposition suivante :

Donc : $\forall n \in N \qquad B_n \le A_n < B_n + 10^{1-n}$. (1)

Ainsi puisque B_n donne les n premières décimales de B, $B_n + 10^{1-n}$ a les mêmes n-2 premières décimales que B[22] ; donc d'après la relation (1), les réels A et B ont les mêmes n-2 premières décimales ; ceci pour tout n? Donc ils ont les mêmes décimales quel que soit leurs rangs respectifs, $\forall i \in N \quad a_i = b_i$; ils sont donc égaux .

En conséquence de la définition et du théorème ci-dessus, il vient la conclusion :

Propriété. Un réel A est déterminé de façon unique par la donnée pour chaque valeur de l'entier n, d'une valeur approchée décimale C_n à moins de 10^{-n} près. C'est à dire que pour tout entier n, on peut trouver C_n tel que : $C_n - 10^{-n} \le A \le C_n + 10^{-n}$.

Nous admettrons dans le cadre de cette exposé l'existence des opérations dans R avec les mêmes propriétés que dans Q, nous considérons que l'ordre total dans R est celui défini sur les D.D.I[23] privés de Δ_9. Notons aussi comme admises les propriétés :

P1. tout réel non nul admet un inverse.

P2 Chaque réel positif x admet une racine carrée positive, dont le développement décimal s'obtient en poursuivant indéfiniment l'algorithme de la racine carrée sur une V.A. décimale à 10^{-n} près de x.

Valeurs approchées à 10^{-n} près par défaut ou par excès d'un nombre réel.

Nous savons qu'il existe des non rationnels, par exemple les radicaux qui sont non rationnels, π etc.

Définition . Soit le décimal 10^{-n} où n est un entier naturel ; a est une valeur approchée par défaut (resp. par excès) du nombre[24] x à moins de 10^{-n} près si on a : $a \le x \le a + 10^{-n}$ (resp.

---

[21] Sans pouvoir préciser si c'est une V.A. par défaut ou par excès.

[22] $B_4 = 1{,}4142$ et $B_4 + 10^{-3} = 1{,}4152$ à propos de $\sqrt{2}$.

[23] Soit : A < ou = à B équivaut à : il existe un rang k tel $a_k \le b_k$

[24] Le nombre x n'est pas nécessairement un rationnel.

$a-10^{-n} \le x \le a$). Rappelons que "L*a valeur décimale approchée*[25] *à* 10^{-n} *près de x*" ou "*le développement décimal d'ordre n de x*" désigne le seul nombre décimal A_n, ayant au plus n décimales, qui satisfait à la double inégalité : $A_n \le x < A_n + 10^{-n}$

Remarque. Si le nombre réel est défini par son DDI propre, on obtient *sa V.A. décimale à* 10^{-n} *près* en supprimant les décimales de rang strictement supérieur à n. Ainsi 1,4142 a pour V.A. à 10^{-2} prés 1,41. **Mais attention,** nous avons constatés dans le paragraphe précédent que réciproquement la donnée d'une V.A. à 10^{-n} de x ne détermine pas nécessairement les n premières décimales du nombre x. Ainsi sur un autre exemple : 1,99999 est une *V.A. décimale approchée* 10^{-5} *près* de 2, bien que ces deux nombres n'aient aucune décimale commune.

Brèves définitions des opérations sur les V.A. à 10^{-n} près[26].

a) Valeurs approchées d'une somme

Soit x_1 et x_2 deux nombres positifs : l'implication suivante est vraie :

$$a_1 \le x_1 \le a_1 + 10^{-n} \text{ et } a_2 \le x_2 \le a_2 + 10^{-n} \Rightarrow a_1 + a_2 \le x_1 + x_2 \le a_1 + a_2 + 210^{-n}$$

Donc $a_1 + a_2$ est une V.A. à 210^{-n} près par défaut, mais pas nécessairement décimale.

b) Valeurs approchées d'un produit.

Dans les mêmes conditions il vient : $a_1 a_2 \le x_1 x_2 \le (a_1 + 10^{-n})(a_2 + 10^{-n})$. Ceci montre que $a_1 a_2$ est une V.A. du produit, mais pas nécessairement décimale.

c) Valeurs approchées d'une différence.

Dans les mêmes conditions il vient : $a_1 - (a_2 + 10^{-n}) \le x_1 - x_2 \le (a_1 + 10^{-n}) - a_2$. Ceci donne des V.A. de la différence non décimales en général.

d) Valeurs approchées d'un quotient.

Toujours dans les mêmes conditions : $\dfrac{a_1}{a_2 + 10^{-n}} \le \dfrac{x_1}{x_2} \le \dfrac{a_1 + 10^{-n}}{a_2}$ donnent des V.A. si les dénominateurs sont non nuls; mais elles ne sont pas décimales.

e) Valeurs approchées d'une racine carrée. $0 < a \le x \le a + 10^{-n} \Rightarrow \sqrt{a} \le \sqrt{x} \le \sqrt{a} + \dfrac{10^{-n}}{\sqrt{2a}}$.

Ce qui donne également des V.A. de $\sqrt{x}$, bien entendu non décimale en général.

III AXIOMES DES grandeurs mesurables et LA DROITE REELLE.[27]

Ayant ainsi défini les réels par les D.D.I., il reste à vérifier que cette définition est compatible avec la représentation des réels par les points d'un axe orienté et gradué.

III-1 axiomes des grandeurs mesurables

Les grandeurs orientés d'une même espèce constituent un groupe abélien[28] ordonné G, satisfaisant aux conditions suivantes :

---

[25] Lorsque nous parlons de valeur approchée, sans préciser, il s'agira de valeur approchée par défaut.

[26] Dans un contexte plus théorique, pour généraliser la notion de valeur approchée à un réel positif près, il suffit de remplacer partout 10^{-n} par ε.

[27] Exposé facultatif au Lycée.

A) axiome d'Archimède. Quels que soient les éléments a et b de G il existe un entier n satisfaisant à $n.a \geq b$.
B) axiome de division. Il existe un entier k >1 tel qu'à tout élément a de g on puisse faire correspondre au moins un élément b de G satisfaisant à k.b = a.
C) axiome ce Cantor. Soit (x_n) et (x'_n) deux suites d'éléments de G satisfaisant à :

1° $\forall n \in N \ \ x_n \leq x_{n+1} \leq x'_n \leq x'_{n+1}$

2° On peut rendre la différence $x'_n - x_n$ aussi petite que l'on veut à condition de choisir n suffisamment grand.

Alors il existe un élément et un seul x de G tel que : $x_n \leq x \leq x'_n$

III-2 Axiomes de la droite numérique.

L'ensemble des vecteurs de la droite orientée est un groupe additif en bijection avec les points de la droite dès qu'on a choisi une origine O pour origine de tous les vecteurs ; et les axiomes de la droite géométrique s'obtiennent en appliquant aux vecteurs portés par la droite les axiomes généraux des grandeurs mesurables orientées.

I L'axiome d'Archimède est admis dès les petites classes en disant que la droite est illimitée.

II L'axiome de la division se rencontre en classe de 3° comme application du théorème de Thalés lorsqu'on dit que tout segment peut être partagé en k segments de longueurs égales.

III L'axiome de Cantor est utilisé en géométrie lorsqu'on veut prouver que le polygone variable inscrit dans un cercle a une limite lorsque le côté tend vers zéro. Pour la droite elle même, l'axiome de Cantor intervient quand on la plonge dans le plan, et pour prouver l'intersection d'une droite et d'un cercle, ce qui dépasse le niveau du Lycée puisque cela nécessite des éléments de topologie.

CONCLUSION

Ainsi sont reliées d'une part les propriétés des grandeurs mesurables des segments qui ont *nécessité l'introduction des réels* et d'autre part *les propriétés de la droite géométrique* ; les deux systèmes d'axiomes permettent de mettre en bijection les points de la droite et les nombres réels. Un point M est en bijection avec *la mesure algébrique* du vecteur $\overrightarrow{OM}$. En Terminale on se limitera à préciser que cette bijection donne une bonne représentation géométrique des réels : elle visualise les nombres négatifs, l'ordre total dans R, les parties d'un seul tenant appelées intervalles, la distance euclidienne dans R, la valeur absolue etc…Remarquons que la borne supérieure d'une partie non vide et majorée est souvent difficile à "géométriser".

[28] La notion de "groupe" revient au programme officiel en septembre 98 en T.S.