CHAPITRE II
LIMITES DE SUITES ET DE FONCTIONS

I PREMIERES DEFINITIONS. EXEMPLES

§1 Définition ; Exemples

Une suite de nombres comme son nom l'indique est la donnée, dans certain un ordre, d'un nombre après l'autre ; citons quelques exemples :.

1, 3, 5, 7 ,….,2n+1, ……..

0, 2, 4, 6, …..,2n, ……….

1, 2,3 4, 5……,n …………

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\ldots\ldots\frac{1}{n},\ldots\ldots$

$1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2},\ldots\ldots,\frac{1}{n^2},\ldots\ldots$

$1,\ 3,\ 3^2,\ 3^3,\ldots\ldots 3^n,\ldots$

$0,\ \sin(\frac{\pi}{2}),\ \sin(2.\frac{\pi}{2}),\ \sin(3\frac{\pi}{2}),\ldots\ldots\sin(n.\frac{\pi}{2}),\ldots\ldots$

Définition 1. Une suite numérique est une fonction définie sur N ou une partie de N, à valeurs dans R. On note u_n le terme de rang n ou terme général, on note $u = (u_n)$ la suite elle-même.

Nous avons rencontré dès la classe de 1° plusieurs types de suites, les suites arithmétiques, géométriques, ou encore définies par une fonction numérique Nous avons étudié la monotonie de certaines suites, puis les suites constantes, les suites périodiques, alternées.
Notre propos ici est d'étudier leur comportement asymptotique, c'est à dire le comportement du réel u_n quand n devient très grand.

§2 Convergence d'une suite vers en zéro

Exemple1. Intuitivement le terme général de la suite ($u_n = \frac{1}{n}$) peut être rendu aussi voisin de zéro que l'on veut. En effet, soit l'entier m donné : $0 < \frac{1}{n} \leq 10^{-m} \iff n \geq 10^{m}$.

Il suffit donc par exemple que l'entier $n \geq 10^6$ pour que $0 < \frac{1}{n} \leq 10^{-6}$.

- Ainsi $\frac{1}{n}$ est une valeur approchée par excès de 0 à 10^{-m} (donc à fortiori une V.A[1]. à 10^{-m} près de 0) dés que le rang $n \geq 10^6$.
- En terme de distance ceci équivaut à : Si $n \geq 10^6$ alors $\left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq 10^{-m}$.

On dira que la suite $(\frac{1}{n})$ converge vers 0 ou à pour limite 0 lorsque n tend vers l'infini.

Exemple 2. Soit la suite définie sur N et de terme général $v_n = (\frac{1}{2})^n$.

[1] Dans ce chapitre l'abréviation V.A. signifie " valeur approchée". Rappelons que x est une V.A. de a à 10^{-m} près signifie que : $a - 10^{-m} \leq x \leq a + 10^{-m}$ ou $|x - a| \leq 10^{-m}$

- En remarquant que $(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16} \leq 10^{-1}$, il vient $(\frac{1}{2})^{4m} \leq 10^{-m}$. Puisque la suite (v_n) est décroissante : $v_n = (\frac{1}{2})^n$ est une V.A. à 10^{-m} près de 0 dès que le rang n dépasse ou égale 4m.
- En terme de distance ceci équivaut à : si $n \geq 4m$ alors $0 \leq \left|\frac{1}{2^n} - 0\right| \leq 10^{-m}$

Ainsi $v_{12} \leq 10^{-3}$ puisque $12 \geq 4 \times 3$. On peut aussi utiliser cette majoration classique : $(\frac{1}{2})^{10} = \frac{1}{1024} \leq \frac{1}{1000}$, à fortiori $(\frac{1}{2})^{12} \leq 10^{-3}$.

On dira que la suite $v_n = (\frac{1}{2})^n$ converge vers 0 ou à pour limite 0 lorsque n tend vers l'infini.

Définition 2. Soit une suite (u_n) définie sur N, ou à partir d'un certain rang n_0. **Cette suite converge vers 0** ou a pour limite 0 quand n tend vers l'infini si et seulement si : , il existe un entier p dépendant de m tel que **"u_n est une V.A. de 0 à 10^{-m} près dès que son rang n égale ou dépasse le rang p."**
C'est à dire **:** Si $n \geq p$ Alors $-10^{-m} \leq u_n \leq 10^{-m}$ ou encore Si $n \geq p$ alors $|u_n| \leq 10^{-m}$
On note $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$ ou $\lim(u_n) = 0$

Définition 2 bis. $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$ équivaut à : pour tout entier m fixé, il existe un entier p dépendant de m tel que : " Tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à l'intervalle $\left[-10^{-m}; 10^{-m}\right]$ dès que leur rang $n \geq p$".

Exemple 3. Soit une suite géométrique $v = (q^n)$ de raison , q un réel fixé tel que $-1/2 \leq q \leq 1/2$: étudier le comportement de q^n lorsque n est très grand.

$\forall n \in N \quad |q^n| \leq (\frac{1}{2})^n$. L'exemple 2 ci-dessus nous autorise à dire :

- Dés que le rang n dépasse ou égale 4m, le terme de la suite q^n est une V.A. de 0 à 10^{-m} près.
- En terme de distance ceci équivaut à : Si $n \geq 4m$ alors $d(q^n, 0) \leq 10^{-m}$; c'est à dire. $|q^n| \leq 10^{-m}$. Ce qui prouve que Si $|q| \leq \frac{1}{2}$ alors la suite (q^n) converge vers 0 ; nous verrons ultérieurement que la condition $|q| < 1$ suffit pour la suite (q^n)converge vers 0 ; il suffit pour cela d'utiliser la formule du binôme de Newton[1].

---

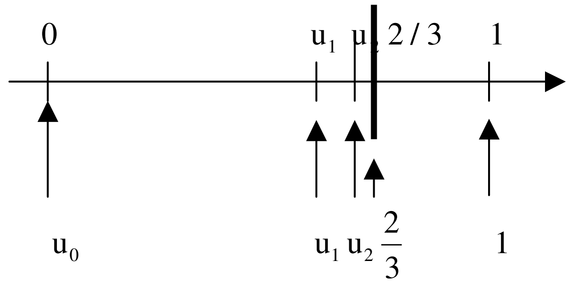
[1] Si $0 < q < 1$, posons q' = 1/q ; alors q' > 1 et il existe $\alpha > 0$ tel que $q' = 1 + \alpha$. Alors $(1+\alpha)^n = 1 + n\alpha + ..$ entraîne : $0 < q^n < \frac{1}{1 + n\alpha} \leq \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{n}$. La démonstration s'en suit.

§3 Convergence d'une suite vers le réel *l*

Exemple 4.

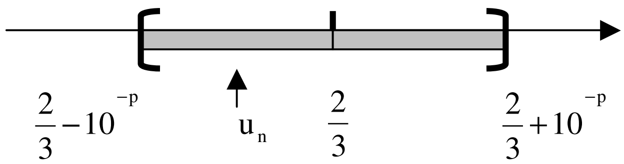
Soit la suite de nombres définie terme à terme par :

$u_0 = 0$ $u_1 = 0{,}60000.....$ $u_2 = 0{,}66000.....$ ....$u_p = 0{,}66.......6600.....$



- Le terme u_m est le D.D.I. de $\frac{2}{3}$ de rang m défini au chapitre1 : c'est à dire **la V.A.** par défaut de $\frac{2}{3}$ à 10^{-m}près : $u_m \le \frac{2}{3} < u_m + 10^{-m}$. Donc à fortiori u_m est **une V.A.** de $\frac{2}{3}$ à 10^{-m}près, c'est à dire $u_m - 10^{-m} \le \frac{2}{3} \le u_m + 10^{-m}$. La suite (u_n) est croissante, donc dès que le rang n égale ou dépasse p = m, u_n est une V.A. de $\frac{2}{3}$ à 10^{-m}près. En terme de distance ceci équivaut à : Si $n \ge m$ Alors $\left|u_n - \frac{2}{3}\right| \le 10^{-m}$; ce qui signifie $d(u_n, \frac{2}{3}) \le 10^{-m}$.

  On dit que (u_n) converge vers $\frac{2}{3}$, ou a pour limite $\frac{2}{3}$ lorsque n tend vers l'infini.
- La figure ci-dessous illustre cette inégalité.



Définition 3. La suite (u_n) converge vers le nombre réel *l* quand n tend vers l'infini si et seulement si : pour tout entier m donné, il existe un entier p dépendant de m tel que **"u_n est une V.A. de *l* à 10^{-m} près dès que son rang n égale ou dépasse le rang p."**

C'est à dire Si $n \ge p$ Alors $\ell - 10^{-m} \le u_n \le \ell + 10^{-m}$ ou encore Si $n \ge p$ alors $|u_n - \ell| \le 10^{-m}$

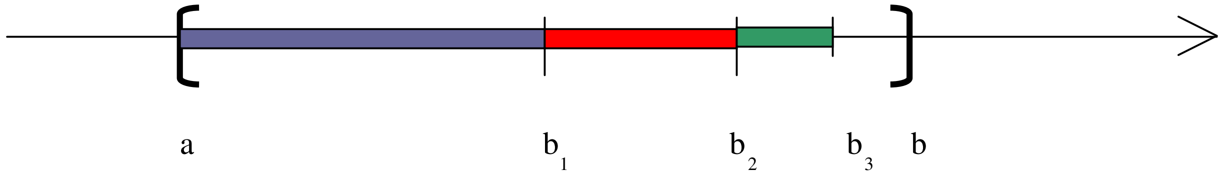
On note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ ou $\lim(u_n) = \ell$

Si la limite de la suite (u_n) existe, on admettra qu'elle est unique.

La figure ci-dessus illustre la définition équivalente **:**

Définition 3 bis $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ ou $\lim(u_n) = \ell$ équivaut à **:** pour tout entier m donné, il existe un entier p dépendant de m tel que : " Tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à l'intervalle $\left[\ell - 10^{-m}; \ell + 10^{-m}\right]$ dès que rang $n \ge p$".

Exemple 5. Soit un segment [a,b] de longueur 1 et b_1 le milieu de [a,b], b_2 le milieu de $[b_1, b]$, et ainsi de suite. Les suites de réels sont représentées sur la droite ci-dessus.



Les longueurs successives des demi-segments consécutifs sont $\frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2}, \quad \frac{1}{2^n}, \ldots\ldots$ et le segment $[a, b_n]$ a pour longueur $S_n = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^n}$. La suite (S_n), appelée aussi série géométrique de raison 1/2 est définie sur N^*. Intuitivement la figure nous permet de conjecturer que le processus de construction des milieux ne peut s'arrêter si l'on veut bien considérer l'existence de la divisibilité potentiellement infinie d'un intervalle de **R**[1]. Il est aussi intuitivement évident que la suite (S_n) converge vers le nombre 1, la longueur du segment [a,b].

La preuve est aisée. En effet $S_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\right]$, résultat connu dès la classe de 1° ; donc

$$S_n = 1 - \frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}. \text{ Donc } \quad \left|S_n - 1\right| = \frac{1}{2^n}$$

- Ainsi le nombre S_n est une V.A. de 1 à10^{-m} près dès que $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-m}$; utilisons de nouveau l'exercice 2 du §2 : la proposition sera réalisée dès que $n. \geq 4m$
- Pour tout entier m il existe un entier p dépendant de m tel que SI $n \geq 4m$ ALORS $\left|S_n - 1\right| \leq 10^{-m}$. On note $\lim_{n \to \infty} S_n = 1$

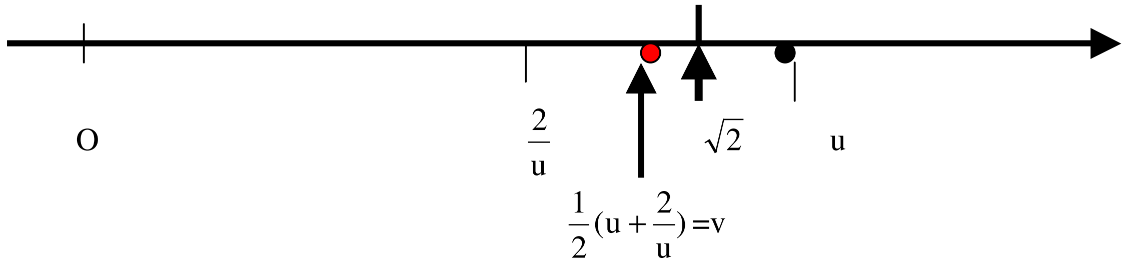
Exemple 5. Le nombre $\sqrt{2}$ est un irrationnel donc son développement décimal est illimité et non périodique. Le calcul des valeurs approchées $\sqrt{2}$ à 10^{-n} près par défaut peut se faire de divers façons, j'ai rappelé au chapitre précédent l'algorithme étudié naguère au collège. Les calculatrices programmables actuelles permettent d'utiliser beaucoup d'algorithmes qui autrefois donnaient lieu à des calculs trop longs. En voici un exemple.

[1] C'est l'axiome de divisibilité admis dans la définition des réels au Chapitre 1.

Propriété. SI u est une valeur approchée positive de $\sqrt{2}$ **ALORS**

a) Si $\sqrt{2} < u$ alors $0 < \frac{2}{u} < \sqrt{2}$. Si $u < \sqrt{2}$ alors $\frac{2}{u} > \sqrt{2}$

b) $v = \frac{1}{2}(u + \frac{2}{u})$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ plus précise que u et $\left|v - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|u - \sqrt{2}\right|$.



a) est évident si $u > 0$

b) Pour v le point milieu de $[\frac{2}{u}, u]$, il est évident que v est une meilleure approximation.

Précisons : $v - \sqrt{2} = \frac{1}{2}(u + \frac{2}{u}) - \sqrt{2} = \frac{1}{2u}(u^2 - 2u\sqrt{2} + 2) = \frac{1}{2u}(u - \sqrt{2})^2$

Puisque u est voisin de $\sqrt{2}$: $u - \sqrt{2} < u$ donc $\frac{u - \sqrt{2}}{u} < 1$. Il vient alors $\frac{1}{2u}(u - \sqrt{2})^2 < \frac{1}{2}(u - \sqrt{2})$ d'où la propriété b). L'intérêt de ce procédé d'approximation de $\sqrt{2}$ est remarquable puisqu'il divise par deux la précision à chaque nouvelle étape.

Définition. Soit la suite (u_n) à termes positifs telle que $u_0 = 2$ et $u_1 = \frac{1}{2}(u_0 + \frac{2}{u_0})$ et ainsi de suite .... $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$ pour tout entier n.

Puisque la propriété précédente entraîne $\left|u_1 - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_0 - \sqrt{2}\right|$, il est aisé de démontrer par récurrence sur l'entier n : pour tout entier n : $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2^n}\left|u_0 - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. (i)

- **Concluons.:** D'après l'exercice 2 du §2 : SI $n \geq 4m$ ALORS $\left|\frac{1}{2^n}\right| \leq 10^{-m}$; à fortiori Si $n \geq 4m$ Alors $\left|\frac{1}{2^{n+1}}\right| \leq 10^{-m}$. L'inégalité (i) donne donc : pour tout entier m il existe un entier p= 4m tel que Si $n \geq p$ Alors $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq 10^{-m}$. Ceci signifie "par définition " que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.
- **REMARQUE.** Les calculs réalisés sur une calculatrice affichant 10 décimales donne $u_0 = 2$ puis,
  $u_1 = 1{,}5$ $u_2 = 1{,}4166.....$ $u_3 = 1{,}41421566...$ $u_4 = 1{,}41421356...u_5 = 1{,}41421356....$

Remarque. La stabilité des huit décimales après la virgule nous incite à conjecturer que 1,41421356 est la Valeur Approchée décimale unique de $\sqrt{2}$ à 10^{-8} près. La condition p = 4m = 4×8 =32 signifie que la propriété1 ci-dessus indique que la précision 10^{-8} est atteinte à coup sûr dès le terme de rang 32. Or cette précision pour une V.A. de $\sqrt{2}$ est réalisée dans les calculs dès le rang 6. Peut-on le justifier dès maintenant ?. Non , mais on peut faire remarquer que la majoration choisie " $(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16} \leq 10^{-1}$ " est grossière, mais cela ne suffit pas.
L'inégalité des accroissements finis prouvera ultérieurement que la majoration $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2^n}\left|u_0 - \sqrt{2}\right|$ est également grossière car tous les termes de la suites sont dans l'intervalle[1,4 ; 1,5] dès le rang 1.

Exercice . Démontrer de la même façon que l'on peut trouver une suite qui converge vers $\sqrt{3}$; donner une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-8}. On posera $u_0 = 2$

§4 Suites de limite infinie

Le comportement asymptotique des suites suivantes, excepté dans le dernier cas, est aisé à étudier.
1, 3, 5, 7 ,….,2n+1, ……..
0, 2, 4, 6, …..,2n, ……….
1, 2,3 4, 5……,n ………… $1,\ 3,\ 3^2,\ 3^3,\ldots\ldots.3^n,\ldots..$

$0,\ \sin(\frac{\pi}{2}),\ \sin(2.\frac{\pi}{2}),\ \sin(3\frac{\pi}{2}),\ldots\ldots\ldots\sin(n.\frac{\pi}{2}),\ldots\ldots\ldots$

Définition 4. La suite (u_n) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) lorsque n tend vers l'infini si et seulement si quel soit l'entier m, il existe un entier p dépendant de m tel que le terme u_n égale ou dépasse 10^m (respectivement égale ou est inférieur à-10^m) dès que son rang n égale ou dépasse l'entier p. C'est à dire Si n≥p Alors $u_n \geq 10^m$ (respectivement $u_n \leq -10^m$). On note $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = +\infty$(respectivement $-\infty$).

Définition 4bis $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = +\infty$(respectivement $-\infty$) équivaut à " quelque soit l'entier m, il existe un entier p dépendant de m tel que : tous les termes de la suites (u_n) appartiennent à l'intervalle $[10^m, +\infty[$ dès que leur rang n égale ou dépasse le rang p".

Théorème 1

-Les suites $(\frac{1}{n})$, $(\frac{1}{n^2})$, $(\frac{1}{n^3})$,$(\frac{1}{n^k})$, $(\frac{1}{\sqrt{n}})$,$(\frac{1}{\sqrt{n^k}})$, et (q^n) avec $|q| < 1$ converge vers 0

-Les suites (n), (n^2), (n^3) (n^k), $(\sqrt{n})$, $(\sqrt{n^k})$ et (q^n) avec $q > 1$ tendent vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.

- Les suites (q^n) avec $q < -1$, (sin(n)), (cosn) et tan(n) n'ont pas de limite, finie ou non, quand n tend vers l'infini.

exemple 1 : $\frac{1}{n^3} \le 10^{-m} \Leftrightarrow n^3 \ge 10^m \Leftrightarrow n \ge 10^{\frac{m}{3}}$. Posons $p = E(10^{\frac{m}{3}})+1$. (E est la fonction partie entière). Si $n \ge p$ Alors $\left|\frac{1}{n^3}\right| \le 10^{-m}$ donc $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^3}) = 0$

exemple 2 : pour tout entier donné m **:** $\sqrt{n} \ge 10^m \Leftrightarrow n \ge 10^{2m}$**.** Donc dès que n égale ou dépasse le rang p = 2m alors $\sqrt{n} \ge 10^m$

exemple 3 Si q >1, q peut s'écrire $1+\alpha$ où $\alpha > 0$. La formule du binôme de Newton devient : $q^n = (1+\alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n}{2!}\alpha^2 + ... = 1 + n\alpha + r$ avec $r > 0$. Ainsi pour tout entier n $q^n \ge 1 + n\alpha$.

Or $1 + n\alpha \ge 10^m \Leftrightarrow n \ge \frac{10^m - 1}{\alpha}$. Posons $p = E(\frac{10^m - 1}{\alpha})+1$. Si $n \ge p$ Alors $q^n \ge 10^{-m}$ donc $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$. Si $|q| < 1$ on pose $q' = \frac{1}{q}$ avec $q' > 1$. On démontre alors aisément $\lim_{n\to\infty}(q^n) = 0$

Exemple 4 Des propriétés de la fonction sinus qui résultent au Lycée de considération géométrique à partie du cercle unité, il ressort que de comportement de sin(n) n'est pas réductible à une des définitions précédentes. On peut dire : lorsque n tend vers l'infini, la valeur du réel sin(n) oscille entre les valeurs -1, et 1. La suite n'a pas de limite, finie ou non.

Corollaire1 .Si la suite (u_n) converge vers le réel ℓ Alors elle est bornée

Résultat rendu évident par la définition : pour m fixé il n'y a qu'un nombre fini de termes de la suite qui ne sont pas dans l'intervalle $\left[\ell - 10^{-m}; \ell + 10^{-m}\right]$: ceux dont le rang est < n.

Théorèmes 2 dit de stabilité

Si $\lim_{n\to\infty}(u_n) = \ell$ et $\lim_{n\to\infty}(v_n) = \ell'$ Alors $\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = \ell + \ell'$ et $\lim_{n\to\infty}(u_n \times v_n) = \ell \times \ell'$

Si $\ell' \ne 0$ Alors $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{v_n}) = \frac{1}{\ell'}$ et $\lim_{n\to\infty}(\frac{u_n}{v_n}) = \frac{\ell}{\ell'}$. Si $\ell' = 0$. Alors $\lim_{n\to\infty}(\frac{u_n}{v_n}) = \pm\infty$

La démonstration du théorème sur la limite d'une somme se réalise simplement.
Au chapitre I, le paragraphe qui donne de "Brèves définitions des opérations sur les V.A. à 10^{-n} près par défaut [1]." Permet ici : soient x_1 et x_2 deux nombres positifs :

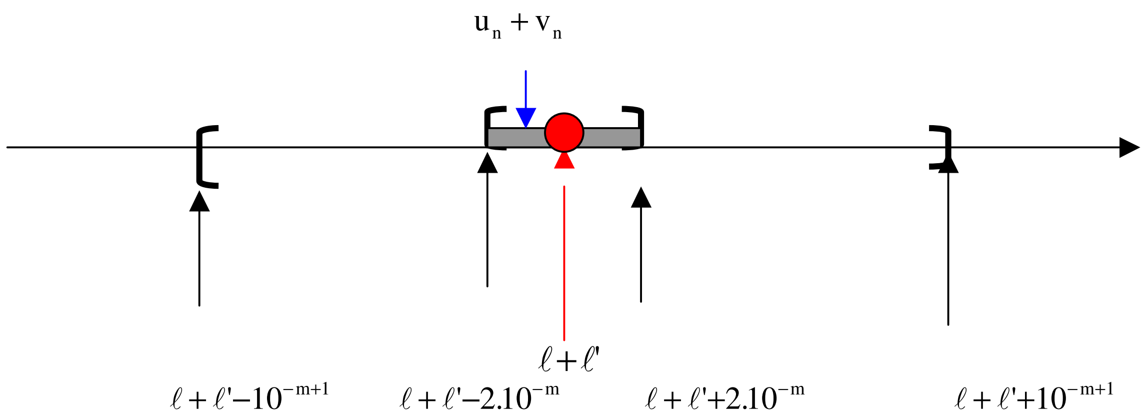
$$a_1 - 10^{-n} \le x_1 \le a_1 + 10^{-n} \; ; a_2 - 10^{-n} \le x_2 \le a_2 + 10^{-n}$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 - 2.10^{-n} \le x_1 + x_2 \le a_1 + a_2 + 210^{-n} \quad \Rightarrow a_1 + a_2 - 10^{-n+1} \le x_1 + x_2 \le a_1 + a_2 + 10^{-n+1} \quad (1)$$

$a_1 + a_2$ est une V.A. de $x_1 + x_2$ à 2.10^{-n} près, à fortiori à 10^{-n+1}près.

En revenant aux suites, utilisons la relation (1) ci-dessus pour traduire : $\lim_{n\to\infty}(u_n) = \ell$ et $\lim_{n\to\infty}(v_n) = \ell'$ **:** un entier m fixé entraîne l'existence de deux entiers p_1 et p_2. Il suffit donc de choisir p_1 et p_2 et l'entier p généré par l'entier donné m+1 pour obtenir la relation désirée : "Si $n \ge p$ Alors $\ell + \ell' - 10^{-m} \le u_n + v_n \le \ell + \ell' + 10^{-m}$" p est le plus grand des deux entiers p_1 et p_2 .

[1] Pour généraliser la notion de valeur approchée à un réel positif près, il suffit de remplacer partout 10^{-n} par ε



Toujours sous les mêmes hypothèses sur les deux suites :
$u_n v_n - \ell\ell' = u_n v_n - u_n\ell' + u_n\ell' - \ell\ell' = u_n(v_n - \ell') + \ell'(u_n - \ell)$ (r)
Voici un cas où la démonstration, pour une première approche, est aisée. Supposons que $|\ell| \le 1$, $|\ell'| \le 1$ et pour tout entier n, $|u_n| \le 1$ et $|v_n| \le 1$. Alors la relation (r) ci-dessus entraîne : $|\ u_n v_n - \ell\ell'\ | \le |\ u_n\ | \times |\ (v_n - \ell')\ | + |\ \ell'\ | \times |\ (u_n - \ell)\ |$ Par suite
$|\ u_n v_n - \ell\ell'\ | \le |\ (v_n - \ell')\ | + |\ (u_n - \ell)\ | \le 10^{-m} + 10^{-m} \le 2.10^{-m} \le 10^{-m+1}$. D'où le résultat annoncé.

Limite et ordre :Théorème3 dit théorème des gendarmes
Si $\forall n \in N \quad u_n \le w_n \le v_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = \ell$ et $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n) = \ell$ Alors (w_n) converge et $\lim\limits_{n\to\infty}(w_n) = \ell$

Preuve. Les hypothèses $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = \ell$ et $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n) = \ell$ entraînent pour un entier m fixé l'existence de deux entiers p_1 et p_2 et donc d'un entier p, le plus grand des deux, dépendant de m et tel que si, leur rang n≥p les termes des deux suites appartiennent tous à l'intervalle $I_m = \left[\ell - 10^{-m}; \ell + 10^{-m}\right]$. A partir de ce rang n l'assertion "tous les termes $w_n \in I_m$" résulte de la double inégalité.

II PROPRIETES DES SUITES DE REELS

§1 Borne supérieure et limite de suites monotones.

La définition des réels par les D.D.I. a permis de définir[1] un ordre total sur R ; Si A et B sont distincts et ont la même partie entière, le plus grand est celui qui a la plus grande partie entière. S'ils ont la même partie entière, examinons leur décimale respective de gauche à droite, la première décimale qui diffère décide de l'ordre de deux nombres. Cette décision est toujours possible puisqu' ils sont distincts et que leurs D.D.I. sont différents.

a) Soit E une partie finie de R.

On suppose que tous les nombres sont positifs. Par exemple, soit E = $\left\{ \begin{array}{l} 0; 0{,}04518029191....; 0{,}1982285822 ; 0{,}19927864045.... ; \\ 0{,}233460158.... ; 0{,}271359550.... ; 0{,}271431309.... \end{array} \right\}$
l'ordre défini dans R en comparant les décimales de même rang nous a permis de les ranger dans l'ordre croissant. IL est évident que le dernier terme est un majorant de E et c'est le plus petit puisqu'il appartient à E.

Généralisons en initiant une méthode qui sera réutilisée dans les autres cas non finis. Les parties entières des réels d'une partie finie E constituent une partie finie de N, à ce titre il en existe une plus grande que toutes les autres ; c'est la propriété de N assurant que toute partie

---

[1] **Définition. 5** Soient les D.D.I. privés de Δ_9, $A = (A_n)$ et $B = (B_n)$, alors :
"$A \le B \Leftrightarrow$ il existe un rang k, $k \in N$, tel que $a_k \le b_k$."

de N admet un plus grand élément qui permet de l'affirmer. Donc il existe ici un entier $a_0$qui est la partie entière la plus grande pour les éléments de E.
- Classons alors les élément de E : d'une part soit E_{a_0} les nombres réels de E ayant comme partie entière a_0. Laissons de côté tous les autres qui sont plus petits que les éléments de E_{a_0}. Sachant l'inclusion $E_{a_0} \subset E$, classons les éléments de E_{a_0} en comparant la première décimale de rang 1 de chacun des éléments de E_{a_0}, elles sont en nombre fini de 0 à 9, une est plus grande que tous les autres : soit a_1. Appelons E_{a_0,a_1} les éléments de E_{a_0} qui ont pour décimale a_1. $E_{a_0,a_1} \subset E_{a_0} \subset E$ est un ensemble fini de R . Continuons le procédé qui donne donc des ensembles consécutifs inclus dans le précédent. Puisqu'il y a un nombre fini et décroissant de réels dans chaque partie de E, la descente est nécessairement finie . A l'issue d'un nombre fini p d'étapes la partie est réduite à un seul réel m de E plus grand que tous les autres. Ce nombre est appelé la borne supérieure de l'ensemble fini E. Pour tout x de E, $x \leq m$ et $m \in E$.

b) **Soit une partie non finie de E et majorée par un réel k. On suppose que tous les éléments de E sont positifs.**

Donnons pour exemple l'ensemble E infini des termes d'une suite x_n , $n \in N$ donnés par leur D.D.I. et rangés par ordre croissant tels que
: $x_1 = 0{,}2000\ldots\ldots x_2 = 0{,}22000\ldots.. x_3 = 0{,}222000\ldots.$ $x_n = 0{,}22222\ldots20000\ldots$ (avec n décimales consécutives égales à 2 et toutes les autres nulles). 0,3 est un majorant de E,
l'entier 1 est aussi un majorant de la partie E.

E admet-il un majorant plus petit que tout les autres ? Par définition du développement décimal, $x_n = 2(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots.. \frac{1}{10^n}) = \frac{2}{10}\left[\frac{1-10^{-n}}{1-\frac{1}{10}}\right] = \frac{2}{9}\left[1-10^{-n}\right] = \frac{2}{9} - \frac{2}{9}10^{-n}.$

Donc $\left|x_n - \frac{2}{9}\right| \leq 10^{-n}$: ce qui signifie par définition que la suite (x_n) converge vers $\frac{2}{9}$.

Or $\frac{2}{9} = 0{,}2222\ldots222222\ldots.$a un D.D.I. composé uniquement de 2 après la virgule.

Par simple comparaison des décimales de même rang, il est clair que tout les termes de E sont majorés par m = $\frac{2}{9} = 0{,}2222\ldots222\ldots.$? Ce majorant m, dans le cas présent, n'appartient pas à E. **Existe-t-il un majorant de la partie E plus petit que m ?** Raisonnons par l'absurde : soit m' un majorant E et m' < m . Leurs D.D.I. diffèrent au moins par une décimale, supposons que la première soit la décimale de rang j ; alors $m' = 0{,}\ 222\ldots2a_j\ldots..$avec $a_j<2$.
Comparons $x_j = 0{,}\ 222\ldots220000$ et m' par leur D.D.I respectif : puisque $a_j<2$, $m' < x_j$. Or ce nombre x_j est un élément de E, donc m' n'est pas un majorant de E. Ainsi, non seulement $\frac{2}{9} = 0{,}2222\ldots222222\ldots.$est un majorant de E, mais c'est le plus petit des majorants : il sera appelé la borne supérieure de E.

b) Plus généralement soit une partie de E non vide et majorée par un réel k.
Posons k = $k_0,k_1k_2\ldots..k_n\ldots..$un majorant de E défini par son D.D.I. (ne contenant pas une

infinité de 9). Les parties entières des éléments de E constituent une partie de N dont les termes sont tous inférieurs à k_0 : il en existe un plus grand que tous les autres a_0 puisque toute partie non vide et majorée de N admet un plus grand élément.
Posons E_{a_0} les nombres de E dont la partie entière est a_0 : $E_{a_0} \subset E$ et $x \in E_{a_0} \Leftrightarrow x \geq a_0$.
Eliminons les autres nombres de E, ils sont strictement inférieurs à tous les éléments de E_{a_0}
-Comparons la première décimale de tous les éléments de E_{a_0}, c'est un entier compris entre 0 et 9 , il y en a donc une plus grande que toutes les autres, soit a_1. Posons $x_1 = a_0, a_1 000$ et soit E_{a_0,a_1} les nombres de E dont la décimale de rang 1 est égale à a_1 : $E_{a_0,a_1} \subset E_{a_0} \subset E$ et $x \in E_{a_0,a_1} \Leftrightarrow x \geq a_0, a_1$. Tous les éléments x de E_{a_0,a_1} ont la même première décimale a_1. Eliminons les autres éléments de E, ils sont plus petits que les éléments de E_{a_0,a_1}
-Répétons le processus avec la décimale de rang 2 des éléments de E_{a_0,a_1}, de même soit a_2 la plus grande décimale de rang 2 parmi les décimales de même rang des nombres de E_{a_0,a_1} ; soit le nombre décimal $x_2 = a_0, a_1 a_2 0000$.. Posons E_{a_0,a_1a_2} l'ensemble des éléments de E_{a_0,a_1} vérifiant $x \geq x_2$. Alors tous les éléments de E_{a_0,a_1a_2} ont les mêmes décimales de rang 0, 1 et 2. Eliminons tous les autres éléments de E , ils sont inférieurs à ceux de E_{a_0,a_1a_2}. On a $E_{a_0,a_1a_2} \subset E_{a_0,a_1} \subset E_{a_0} \subset E$
-Après avoir reproduit ce processus pour les autres décimales jusqu'au rang i, posons a_i non nul la plus grande décimale d'ordre i des éléments de $E_{a_0,a_1a_2\ldots a_{i-1}}$. Soit le décimal $x_i = a_0, a_1 a_2 \ldots a_i 000$. Soit $E_{a_0,a_1a_2\ldots a_i}$ les éléments de $E_{a_0,a_1a_2\ldots a_{i-1}}$ qui ont les mêmes décimales jusqu'au rang i que $x_i = a_0, a_1 a_2 \ldots a_{i-1} a_i 000$. La partie $E_{a_0,a_1a_2\ldots a_i}$ est non vide. Eliminons tous les autres éléments de E, ils sont inférieurs à ceux de $E_{a_0,a_1a_2\ldots a_i}$.On a donc les inclusions $E_{a_0,a_1a_2\ldots a_i} \subset E_{a_0,a_1a_2\ldots a_{i-1}} \subset \ldots\ldots \subset E_{a_0,a_1a_2} \subset E_{a_0,a_1} \subset E_{a_0} \subset E$.
L'ensemble E n'étant pas fini, ce processus ne s'arrête pas nécessairement sur un ensemble E_{x_p} réduit à un seul élément. Ainsi la suite (x_n) n'est pas en général finie.

Considérons alors le réel s tel que : pour tout rang entier i, si l'on remplace par zéro dans le D.D.I. de s toutes les décimales de rang > i, on obtient le décimal $x_i = a_0, a_1 a_2 \ldots a_{i-1} a_i 000$**.construit comme ci-dessus.**

Comparons s avec un élément quelconque y de E, $y = y_0, y_1 \ldots. y_i \ldots.$.Pour cela comparons leurs parties entières : celle de s est a_0, celle de y est notée y_0 et par construction de a_0 on a $a_0 \geq y_0$.
Comparons pour un rang fixé i les décimales respectives de s et y. Celle de s est a_i, par construction elle est égale ou supérieure à celle de y selon que y soit supérieure à x_i ou non. Donc $a_i \geq y_i$. Ceci étant vrai quelque soit le rang i : $s \geq y$.
Donc s est un majorant de E.
Supposons qu'il existe un majorant s' de E' strictement inférieur à s. Soit j le premier rang à partir de la gauche pour lequel les décimales de s' et s diffèrent, alors ces décimales sont telles que $a'_j < a_j$. Alors $s' = a_0, a_1 a_2 \ldots a_{j-1} a'_j \ldots\ldots$ et $s = a_0, a_1 a_2 \ldots a_{j-1} a_j \ldots\ldots$. Par construction s' a les mêmes décimales à gauche de a_{j-1} que x_{j-1}. Or il existe par construction au moins un x de

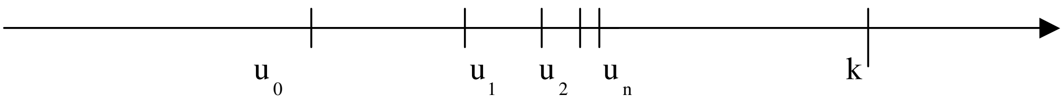
E_{x_j} qui a pour décimales à gauche $a_0,a_1a_2....a_{j-1}a_j$, donc $s' \leq x$ un élément de E, ce n'est pas un majorant de E. **Donc s est le plus petit des majorants de la partie E, on l'appelle la borne supérieure de E.**

Théorème 1. Toute partie non vide et majorée (resp. minorée)de R admet une borne supérieure (resp. borne inférieure)

Ce théorème est souvent admis en première lecture, j'ai donnée la démonstration ici pour témoigner de la cohérence de la définition des réels comme D.D.I.
Ses conséquences sont importantes.

Théorème 2 Toute suite (u_n) de réels, croissante et majorée, converge vers le nombre *l* (*l* est la borne supérieure des termes de la suite).

L'interprétation graphique est une bonne approche de la solution :



Tous les termes sont majorés par le réel k, donc l'ensemble E des termes u_n admet une borne supérieure $l \leq$k. Soit le réel 10^{-m} fixé, le nombre *l* a été construit ci-dessus de façon que pour tout entier m, il existe un terme u_n de la suite tel que u_n et *l* ont les mêmes décimales à gauche de la décimales de rang m ; c'est à dire :

$u_n = a_0,a_1a_2......a_m a_{m+1}.....$ et $l = a_0,a_1a_2......a_m b_{m+1}.....$ et $a_{m+1} \leq b_{m+1}$: donc $|u_n - l| \leq 10^{-m}$.

Si p>n, la suite étant croissante $u_n \leq u_p \leq l$; donc à fortiori $|u_p - l| \leq 10^{-m}$.

En conclusion pour **tout entier m**, il existe **un entier n** tel que **SI** p > n **ALORS** $|u_p - l| \leq 10^{-m}$. Ceci signifie par définition que la suite (u_n) converge vers *l*. cqfd.

Théorème 2bis. Toute suite de nombres réels décroissante et minorée converge vers *l* (la borne inférieure des éléments de la suite)

Théorème 3 Aspect suffisant du Critère de CAUCHY (la réciproque est vraie[1])

Si une suite (u_n) vérifie : pour tout entier m il existe un entier $n_m = N$ dépendant de m tel que p et q plus grands que N entraîne $|u_p - u_q| \leq 10^{-m}$ **Alors** la suite (u_n)converge vers une limite ℓ.

Nous allons construire cette limite ℓ en trouvant successivement tous ses décimales.

- Les termes de la suite peuvent être aussi voisin que l'on veut à partir d'un certain rang N ; donc nécessairement ces réels ont une écriture décimale illimitée ayant la même partie entière à partir d'un certain rang. On peut donc légitimement considérer, pour simplifier la rédaction **que tous les termes de la suite sont dans l'intervalle** $[0;1[$**.**
- Ceci posé, **deux cas peuvent se présenter pour des réels voisins**. Dans le premier cas, celui de la suite récurrente définie par $u_0 = 0{,}2$ et pour tout n ; $u_{n+1} = [\frac{1}{2}(u_n + \frac{0{,}2}{u_n})]$ qui converge vers $\sqrt{0{,}2}$ les premiers termes :

$u_1 = 0{,}6$ $u_2 = 0{,}4666666667$ $u_3 = 0{,}4476190476$ $u_4 = 0{,}4472137791$ $u_5 = 0{,}4472135955$

[1] La démonstration est laissée au soin du lecteur : remarquons que $|u_p - u_q| \leq |u_p - \ell| + |u_q - \ell|$

montrent qu'a partir du rang 2 les décimales d'ordre 1 de tous les termes sont égales à 4 ; puis à partir du rang 3 les décimales d'ordres 2 sont toutes égales à 4 et ainsi de suite.
Dans le second cas, considérons la suite récurrente définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = e^{-u_n}$ dont nous montrerons par un autre moyen que ce critère qu'elle est convergente ; les premiers termes s'écrivent
$u_1 = 0,367879...$, $u_2 = 0,6922...$ $u_{12} = 0,5675566373$, $u_{13} = 0,5669089119$ $u_{14} = 0,5672762322$
Il est clair que dans les termes consécutifs et de plus en plus voisins u_{12}, u_{13}, u_{14} la troisième décimale ne reste pas la même mais passe de 7 à 6 alternativement. Généralisons.

1° Cas

- Si, à partir d'un certain rang N_1, tous les termes de la suite ont la même première décimale a_1, appelons cette décimale a_1 **la première décimale du nombre** ℓ (inconnu pour l'instant). $\forall n > N_1$ $u_{N_1+1} = 0,a_1....,u_{N_1+2} = 0,a_1.....,u_n = 0,a_1.....$
- De même, si à partir d'un certain rang N_2, tous les termes de la suite ont la même deuxième décimale a_2, appelons cette décimale a_2 **la deuxième décimale du nombre** ℓ**.**

Supposons que cette construction fonctionne pour toutes les décimales, quel que soit leur rang**. Considérons alors le réel** ℓ **tel que : pour tout rang entier i, sa décimale est le** a_i **construit comme ci-dessus.**

- Cette construction définit un nombre réel ℓ unique (cf Chapitre I, definition des réels))

Ce nombre ℓ**,** pour chaque entier m donné, a les mêmes m premières décimales que tous les u_k avec k > N ; donc $|u_k - \ell| \le 10^{-m}$ dès que $k > N$. Ceci signifie, par définition de la limite, que $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = \ell$.

2° Cas

Supposons maintenant que la construction ci-dessus **cesse d'être possible à partir de la p-ième décimale**. Ceci signifie qu'à partir d'un certain rang n, " pour tout entier k > n, **les** u_k **n'auront plus tous la même p-ième décimale**". Cette p-ième décimale prend sa valeur parmi les valeurs possibles 0, 1,2,3,…,8,9.

Lemme. Au moins deux des chiffres parmi les dix possibles doivent figurer une infinité de fois comme p-ième décimale dans les termes u_k**.**

En effet si **une seule d'entre elles**, soit a_p, revient infiniment souvent la pième décimale alors les autres chiffres choisis parmi les 9 restants seront, pour chacun, un nombre fini de fois la p-ième décimale. En regroupant ces termes en nombre finis, nous pourrions alors choisir un rang suffisamment élevé N_p pour que les autres chiffres différents de a_p ne soient plus jamais p-ième décimale des u_k avec $k > N_p$. Nous aurions alors la situation du 1° Cas ci-dessus que nous avons écartée. D'où la contradiction.
Maintenant, parmi les chiffres (au moins deux donc) qui reviennent une infinité de fois comme p-ième décimale, **soit b le plus grand de ces chiffres.**
Pour tout entier m donné, il existe un entier n_m=N dépendant de m, tel que p et q plus grands que N entraîne $|u_p - u_q| \le 10^{-m}$. Si on fixe p = N+1 et $u = u_p$ alors si k ≥ N+1 $|u - u_k| \le 10^{-m}$: tous les $u_k \in [u - 10^{-m}; u + 10^{-m}]$.
Il y a donc un nombre fini de termes de la suite (N exactement) en dehors de cet intervalle. Les entiers p et q étant supérieurs à N, nous pouvons choisir u_p avec b comme p-ième décimale et u_q avec une plus petite p-ième décimale (d'après le lemme ci-dessous, les deux types de termes sont en nombre infini) dans ce même intervalle $[a - 10^{-m}; a + 10^{-m}]$. La valeur de la p-ième décimale pour ces trois réels donne l'ordre suivant dans R : $u_q \le 0,a_1a_2.....a_{p-1}b \le u_p (1)$

La relation (1) implique : $0 \le 0,a_1a_2....a_{p-1}b - u_q \le u_p - u_q$ et $0 \le u_p - 0,a_1a_2...a_{p-1}b \le u_p - u_q$

Puisque p et q sont supérieurs à N **Alors** . $|u_p - u_q| \le 10^{-m}$; par suite

$|\ a_q - 0,a_1a_2...a_{p-1}b\ | < 10^{-m}$ et $|\ a_p - 0,a_1a_2...a_{p-1}b\ | < 10^{-m}$ (2)

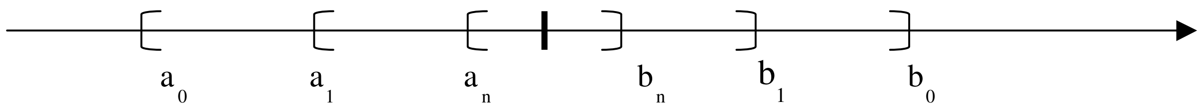
L'itération de ce procédé pour la décimale d'ordre p+1, puis d'ordre p+2 et ainsi de suite permet de définir les décimales quelque soit leur rang. Considérons alors le réel ℓ qui a pour décimale de rang supérieur à p la décimale construite par le procédé ci-dessus.

Ce réel ℓ est unique par définition (cf Chapitre I définition des réels). De plus ce procédé assure à chaque étape les encadrements (2) pour tout entier m. Donc par définition de la limite, $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = \ell$

§2 Intervalles emboîtés de R

Définition 4.Un suite d'intervalles emboîtés $I_n = [a_n, b_n]$ de R est telle que :

$\forall n \in N \quad I_{n+1} \subset I_n$ **et la longueur des intervalles tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.**



Soient les suites (a_n) et (b_n) constituées par les bornes des intervalles $I_n = [a_n, b_n]$:

La suite (a_n) est croissante et majorée par un terme quelconque de la suite (b_n), soit b_0 donc d'après le théorème ci-dessus, elle converge vers un réel $l \le b_n$, pour tout entier n. Ce réel est la borne supérieure des nombres a_n.

De même la suite (b_n) est décroissante et minorée par a_0, elle converge donc vers le réel $l' \ge a_n$, pour tout entier n. Ce réel est la borne inférieure de tous les nombres b_n.Les deux reéls l et l' appartiennent donc à tous les intervalles I_n et de plus l'intervalle $[l,l']$ est inclus dans tous les intervalles I_n . Puisque la longueur des intervalles I_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, nécessairement $l=l'$.

Théorème 3. Une suite (I_n) d'intervalles emboîtés admet un point commun et un seul

REMARQUE. On retrouve sous cette forme le procédé de Cantor définissant un réel par un couple de suites particulières. Fixons dans les termes la propriété de ces deux suites.

Corollaire.Définition. Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si et seulement si :

(i) $\quad \forall n \in N \quad u_n \le v_n$

(ii) $\quad (u_n)$ est croissante et (v_n) est décroissante

(iii) $\quad \lim(v_n - u_n) = 0$

Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.