CHAPITRE III

CONTINUITE D'UNE FONCTION NUMERIQUE DE LA VARIABLE REELLE

I LES PREREQUIS

On considère dans ce chapitre que les notions suivantes sont connues : définition de R par les D.D.I. (cf Chapitre I) ; $d(x ; y) = |x - y|$;ordre total dans R par la relation $\leq$; intervalles de R.

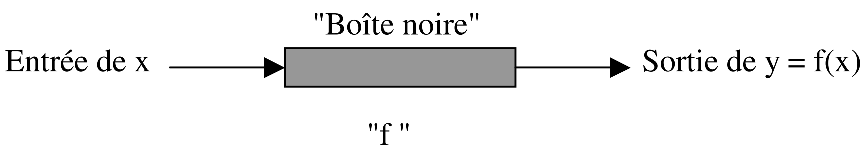
II FONCTION NUMERIQUE DE LA VARIABLE REELLE

§1 Expérience des élèves sur la notion de fonction.

La notion de fonction de la variable réelle est introduite dès le collège, elle tient ensuite une place prépondérante en Analyse dès le Lycée, notamment en seconde avec les premières fonctions rencontrées : les fonctions affines, la fonction carrée, la fonction racine carrée, la fonction inverse, la liste n'est pas exhaustive. Les propriétés de monotonie, de parité, de périodicité, leurs représentations graphiques sont supposées connues ici.
L'importance attachée au sujet est justifiée ; tous les domaines utilisant les mathématiques font appel à cette notion.

§2 Une définition élémentaire

On désigne en général comme fonction "un moyen quelconque" f qui permet d'associer à un nombre donné x un nombre unique y. Selon le degré de connaissance du débutant le nombre x sera un décimal ou un rationnel.. Plus tardivement dans le second cycle des Lycées, x sera un réel appartenant à un intervalle de R ou une réunion d'intervalles appelés le domaine de définition de f . Le schéma suivant illustre la notion de fonction :



Rappelons : y est appelé l'image de x par f ; x est appelé l'antécédent de y par f.
On note souvent ainsi la fonction : $f : x \longrightarrow y = f(x)$.
- La "Boîte noire" peut être un programme de calcul ne comportant que des opérations élémentaires : $f(x) =(2x-3)/(x+1)$, ou peut être le logiciel d'une calculatrice permettant de calculer des V.A. décimales de f(x) en introduisant pour x des V.A décimales de nombres réels. La "Boîte noire" peut aussi être une courbe représentative Cf dans un repère du plan, permettant par le choix d'une abscisse x, d'évaluer, avec plus ou moins de précision, l'ordonnée y du point correspondant y de Cf. La liste des procédés n'est pas exhaustive.

§3 Calcul pratique de f(x) pour x réel défini par son D.D.I.

Supposons le procédé f connu, c'est à dire la "Boîte noire" donnée ; pour calculer $f(x_0)$ il faut connaître x_0. Mais que signifie "connaître" x_0, lorsqu'il est réel. On a vu (cf Chap I) qu'il est défini par son D.D.I. Donc $x_0 = (A_n)_{n\in N}$ [1], et connaître x_0 c'est être capable de donner,

[1] Au chapitre 1, le théorème1 précise qu'un réel a est déterminé de façon unique par la donnée pour chaque valeur de l'entier p , d'une valeur approchée C_p à 10^{-p} près ; c'est à dire tel que :

$$C_p - 10^{-p} \leq a \leq C_p + 10^{-p} \iff |a - C_p| \leq 10^{-p}$$

quelque soit la précision demandée, le décimal A_n. Donc en général on ne connaît pas la valeur exacte du réel x_0 ; alors comment espérer connaître $f(x_0)$? Le réel $f(x_0)$ est connu si quelque soit l'entier naturel m, on sait trouver toutes les décimales de son DDI jusqu'à l'ordre m. Pour lever ce dilemme, utilisant le théorème 1 du chapitre I rappelé en note ci-dessous, on considérera que le réel $f(x_0)$ est connu si une précision arbitraire 10^{-m} étant fixée, on peut trouver une V.A. f(x) de $f(x_0)$ à la précision 10^{-m} en choisissant une V.A. x de x_0 suffisante pour cela.

Exemple1. Soit la restriction de la fonction inverse $f : x \longrightarrow \dfrac{1}{x}$ définie sur l'intervalle E = [0,5 ; 3]. Calculons $f(\sqrt{3})$. Ne pouvant connaître que des V.A. de $\sqrt{3}$, comment alors connaître $f(\sqrt{3})$? En tant que réel, $f(\sqrt{3})$ sera connu si on sait, pour tout entier n, en donner une V.A. décimale C_n à 10^{-n} près. Posons nous donc le problème suivant : Déterminer une V.A. décimale de $\sqrt{3}$ avec une précision suffisante 10^{-p} pour que son inverse soit lui même une V.A. décimale de $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ à 10^{-6} près. Ceci sera à fortiori réalisé si pour tout réel x suffisamment voisin de $\sqrt{3}$, on a : $\left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right| \le 10^{-6}$. *Majorons sur E,* il vient :

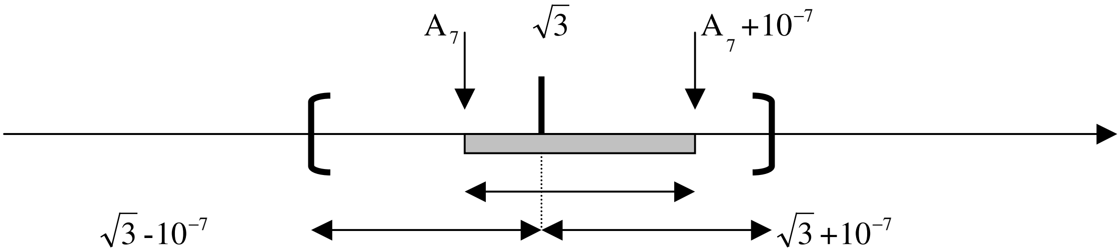
$$\forall x \in E \qquad \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right| = \left|\frac{x-\sqrt{3}}{x\sqrt{3}}\right| \le \frac{\left|x-\sqrt{3}\right|}{0{,}5.(1{,}7)} \le \frac{\left|x-\sqrt{3}\right|}{0{,}85} \le \frac{\left|x-\sqrt{3}\right|}{0{,}1} \text{ ; alors}$$

$$\forall x \in E \text{ tel que } \left|x-\sqrt{3}\right| \le 0{,}1.(10^{-6}) \Rightarrow \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right| \le 10^{-7} \text{ ; ainsi}$$

$$\forall x \in E \text{ tel que } \left|x-\sqrt{3}\right| \le 10^{-7} \Rightarrow \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right| \le 10^{-6}.$$ D'où la propriété :

Propriété. Le réel f(x) appartient à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}-10^{-6} ; \dfrac{1}{\sqrt{3}}+10^{-6}\right]$ dès que x appartient à l'intervalle $\left[\sqrt{3}-10^{-7} ; \sqrt{3}+10^{-7}\right]$.

Or ce qui est vrai pour un tel réel x le sera à fortiori pour toute V.A. décimale C_n à 10^{-7} près de $\sqrt{3}$. Pour trouver ce C_n, soit l'unique V.A. de $\sqrt{3}$ à 10^{-7} près par défaut : $A_7 = 1{,}7320508$, elle vérifie $A_7 \le \sqrt{3} \le A_7 + 10^{-7}$: donc par suite $A_7 \in \left[\sqrt{3}-10^{-7} \ ; \ \sqrt{3}+10^{-7}\right]$.



D'après la propriété ci-dessus, tout décimal $C_7 \in [A_7 ; A_7+10^{-7}]$ appartenant à fortiori à $\left[\sqrt{3}-10^{-7} ; \sqrt{3}+10^{-7}\right]$ convient pour qu'une V.A. décimale à 10^{-6} de son inverse soit une V.A. de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ à 10^{-6}. Prenons dans cet exemple : $C_7 = A_7$.

Le calcul par division euclidienne et la patience donne $\frac{1}{1{,}7320508} = 0{,}\underline{5773502}717......$,

donc 0,577350 est une V.A. décimale à 10^{-6} près de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ d'après le lemme ci-dessus. Au titre de *l'évaluation du matériel*, une calculatrice donne $\frac{1}{\sqrt{3}}$ =$0{,}\underline{577350}26911899....$donc le logiciel de cette calculatrice est mathématiquement correct, il confirme la théorie et de plus notre contrat initial est rempli. La propriété généralise de la façon évidente suivante :

Propriété. Soit $f : x \longrightarrow \frac{1}{x}$ définie sur l'intervalle E = [0,5 ; 3]. L'entier m étant donné, il existe un entier p = m+1 tel que : $\forall x \in E \quad \left|x-\sqrt{3}\right| \leq 10^{-p} \quad \Rightarrow \quad \left|f(x)-f(\sqrt{3})\right| \leq 10^{-m}$

Soit J l'intervalle de R centré en $f(x_0)$ de rayon 10^{-m} ; soit I l'intervalle de R centrée en x_0 de rayon 10^{-p}. La proposition $f(\sqrt{3})-10^{-m} \leq f(x) \leq f(\sqrt{3})+10^{-m}$ est réalisée dès que $\sqrt{3}-10^{-p} \leq x \leq \sqrt{3}+10^{-p}$ se traduit par :"f(x)∈ J si x ∈ I". Cette propriété de la fonction inverse f au point $\sqrt{3}$ qui permet d'approcher d'aussi près que l'on veut de f($\sqrt{3}$),à condition de choisir x suffisamment proche de $\sqrt{3}$ sera appelée **"la continuité de f en $\sqrt{3}$ ".**

III CONTINUITE D'UNE FONCTION EN UN POINT.

§1 La loi d'Ohm et les mesures physiques.

Soit un circuit comportant uniquement une résistance de $100\,\Omega$ et parcouru par un courant d'intensité i ampères. Le physicien ne dispose que d'un ampèremètre et désire calculer la d.d.p. aux bornes du résistor. La loi d'Ohm définit une fonction V de l'intensité V : i V = 100i. Il désire connaître cette d.d.p. avec la précision 10^{-3} volt, quelle doit être la précision de son ampèremètre ? Si i_0 est "*la mesure exacte*" de l'intensité, l'appareil donne i une V.A de celle ci, Si V_0 *est la valeur exacte* de la d.d.p. Il faut donc : $|V-V_0| \leq 10^{-3}$: c'est à dire $|100i-100i_0| \leq 10^{-3}$ donc $100|i-i_0| \leq 10^{-3}$. Ce sera réalisé si $|i-i_0| \leq 10^{-5}$.Ces relations sont vraies pour la même raison que ci-dessus : la fonction V est continue en i_0 par rapport à la variable i. Notons que la précision exigée pour l'appareil est importante, ce qui laisse à penser que l'appareil de mesure est très pointu. Je ne me pose pas ici le problème de faisabilité de ces mesures.

§2 Définition de la continuité en un point.

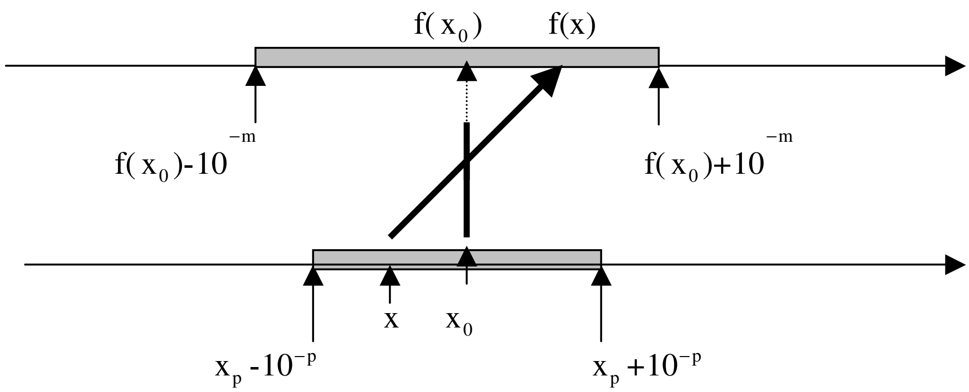
Soit f définie sur un intervalle de R, x_0 un réel de cet intervalle, connaître $f(x_0)$ c'est connaître son D.D.I., ou ce qui est équivalent[1] c'est connaître pour tout entier n un V.A. décimale E_n de $f(x_0)$ à 10^{-m} près. Ceci sera réalisé si pour tout intervalle J centré en $f(x_0)$ et de rayon 10^{-m},

[1] Voir le théorème au chap1

on peut trouver un intervalle I centré en x_0, inclus dans l'intervalle de définition de f et de rayon à déterminer ; tel que les valeurs prises par f dans cet intervalle appartiennent au premier J. C'est à dire : Si $x \in I$ alors $f(x) \in J$ et sera une V.A. de $f(x_0)$ à 10^{-n} près qui permettra d'en trouver V.A. décimale. La fonction sera dite "continue en x_0 "

Définition 1. Soit la fonction f définie sur un intervalle E de R, soit x_0 appartenant E, on dit que f est continue en x_0 si et seulement si : pour tout entier m on peut trouver un entier p tel que f(x) est une V.A de $f(x_0)$ à la précision 10^{-m} dès que x est une V.A de x_0 à la précision de 10^{-p} . c'est à dire: $\forall x \in E \ : \quad |x - x_0| \leq 10^{-p} \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| \leq 10^{-m}$

Remarque. Voir au paragraphe suivant la définition de la continuité a droite ou gauche, rencontrées par exemple pour la fonction "partie entière "
Voici un schéma représentant la proposition énoncée en terme d'intervalles centrés de R.



§3 REMARQUES ET JUSTIFICATIONS.

A quel moment de sa formation, le débutant en analyse doit-il utiliser cette propriété? Est-elle triviale pour les fonctions utilisées au Lycée ? On peut répondre oui à quelque exceptions près, En fait les mathématiciens, comme Cauchy au début du XIX° siècle, ont longtemps pensé que toutes les fonctions étaient continues en chacun des points de leur domaine. Il a fallu l'introduction dans la seconde moitié du XIX° de fonctions appelées " monstres" et définies par des séries infinies par exemple, pour que la discontinuité apparaisse et nécessite d'ailleurs de nouveaux développements des mathématiques pour être explicitée. Cependant il est nécessaire que le débutant en analyse connaisse la notion de continuité en un point ou sur un intervalle. L'introduction qui en est faite ici montre bien que ce n'est pas une problématique artificielle puisqu'elle justifie tous le calcul de l' image d'un réel par une fonction. Enfin et surtout la continuité est nécessaire pour "démontrer " quelques théorèmes d'analyse élémentaire et ne pas réduire le savoir mathématique uniquement à quelques "recettes". En effet l'interprétation de la continuité en termes de limites comme on le fait dans la suite du Chapitre III permet de simplifier et justifier les limites de fonctions dès le Lycée.

§4 Continuité sur un intervalle.

§4-1 Continuité à gauche et à droite

Définition 2 . Soit f définie au moins sur l'intervalle [a, b]. f est continue à droite en a signifie:
$(\forall m \in N)\ (\exists p \in N)$ tel que : $\forall x \in [a;b]\ \ a \leq x \leq a + 10^{-p} \ \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq 10^{-m}$
.On adaptera la définition pour définir la continuité à gauche en b de f.

La fonction "partie entière" est un exemple incontournable de continuité à droite et de non continuité à gauche en chaque point entier relatif.

§4-2. Continuité sur un intervalle

Definition 3. Soit f définie au moins sur un intervalle I de R, f est dite "continue sur I" si et seulement si elle est continue en tout point de I

§4-3 Exercices d'application

1° Démontrer que toute a fonction constante sur l'intervalle I de R est continue sur I.
2° Démontrer que la fonction identique sur I est continue sur I.

3° Démontrer que la fonction f : $x \longrightarrow x^2$ est continue sur l'intervalle [-3 ; 3]

4° Démontrer que la fonction f : $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ est continue sur tout intervalle ne contenant pas 0.

5° Démontrer que la fonction f : $x \longrightarrow \sqrt{x}$ est continue sur tout intervalle I= [o ; b] ; b > 0.

Preuve. Pour x_0 et $x \in]0;b[$, $\left|\sqrt{x_0}-\sqrt{x}\right| = \frac{|x_0-x|}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x}}$

Puisque x_0 et x sont positifs, $\sqrt{|x_0-x|} \leq \sqrt{x_0}+\sqrt{x}$ et leurs inverses donne l'inégalité $\frac{|x_0-x|}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x}} \leq \frac{|x_0-x|}{\sqrt{|x_0-x|}} = \sqrt{|x_0-x|}$. Donc en conclusion $\left|\sqrt{x_0}-\sqrt{x}\right| \leq \sqrt{|x_0-x|}$

Et $\left|\sqrt{x_0}-\sqrt{x}\right| \leq 10^{-m}$ dès que $|x_0-x| \leq 10^{-2m}$; ceci répond à la définition de la continuité de f en x_0, pour m entier fixé, p = 2m.

6° Démontrer que la fonction polynôme f : $x \longrightarrow x^n$ est continue sur [0 ; b]

Selon le degré d'approfondissement désiré, on démontre ou non les théorèmes suivants.

Théorèmes

La somme de deux fonctions continues en x_0 est continues en x_0

Le produit de deux fonctions f et g en x_0 est continue en x_0, le quotient de f et g est continue en x_0

La composée $g \circ f$ de deux fonctions continues respectivement en x_0 et $f(x_0)$ est continue en x_0.

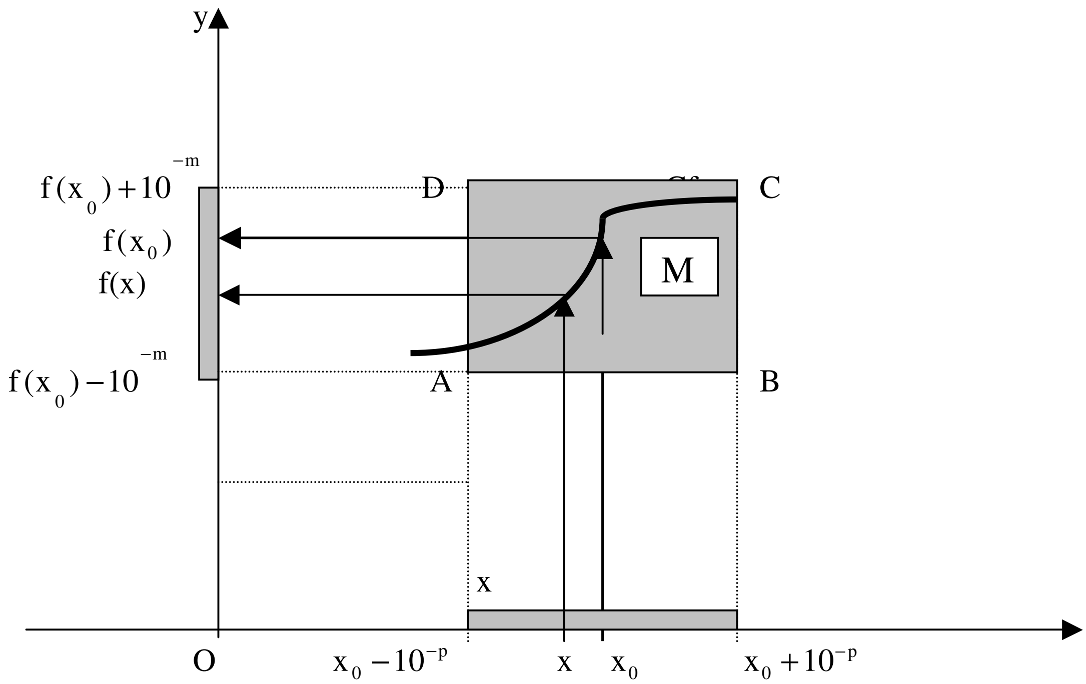
Si f est continue en x_0, sa fonction réciproque f^{-1}, si elle existe, est continue en $f(x_0)$

REMARQUE .

Théorème .(de Bolzano) Soit f définie et continue sur le fermé borné [a ; b] et telle que $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe au moins un réel $c \in]a;b[$ tel que f(c) = 0.

La Démonstration de ce théorème sera réalisée par dichotomie au chapitre IV en utilisant le fait qu'une suite d'intervalles emboîtés définie un réel et un seul. Cette démonstration fait appel à la notion de limite et de continuité ; j'en fait état ici pour illustrer la nécessité de la "continuité" si l'on veut réaliser un développement déductif au Lycée. Ce théorème conduit immédiatement au "théorème des valeurs intermédiaires" et aux bijections réciproques des fonctions continues et strictement monotones, toutes questions qui sont au cœur du champ en d'analyse en T.S.

§5 interprétation géométrique de la continuité en un point.



La définition : $\forall x \in E \ \left|x - x_0\right| \leq 10^{-p} \ \Rightarrow \left|f(x) - f(x_0)\right| \leq 10^{-m}$ entraîne d'un point de vue géométrique : si $M \in Cf$ et a pour abscisse x dans I(x_0; 10^{-p}), alors son ordonnée f(x) est dans J(f(x_0);10^{-m}) ; intuitivement on peut donc dire que qu'il existe un arc de courbe de Cf contenant le point M est contenu dans le rectangle ABCD de largeur AD aussi petite que l'on veut.

Remarque. Par extension à la continuité sur un intervalle, on peut dire aussi intuitivement que si f est continue sur un intervalle I de R, on peut tracer sa courbe représentative Cf sans lever le crayon, *le trait est continu.* Bien entendu cette remarque ne vaut que si l'on peut "tracer la courbe Cf". Même si ce n'est pas effectivement toujours le cas, par exemple lorsqu'il s'agit de certaines fonctions continues et non dérivables définies par une série, l'interprétation "géométrique" faite ici est suffisante pour une première approche de l'analyse.

IV LIMITE D'UNE FONCTION DE LA VARIABLE REELLE

Liminaire. Comme celui des nombres réels, le concept de limite est difficile. Cependant il est incontournable pour débuter en Analyse car très présent. La notion de limite d'une fonction se rencontre pour la première fois au Lycée en classe de 1° lors de l'étude de la dérivabilité d'une fonction en un point donné x_0. En terminale, il est utile de fixer le vocabulaire qui décrit le comportement asymptotique des fonctions polynômes, rationnelles ou non donc les limites infinies ou en l'infini. De même la définition des courbes asymptotes exige la maîtrise d'expression telles que : " f(x)-(ax+b) tend vers 0 lorsque x tend vers +∞". En terminale, l'interprétation de la continuité d'une fonction en un point en terme de limite facilite le calcul effectifs des limites. Dans la même classe, le comportement au voisinage de zéro ou de l'infini se pose pour les nouvelles fonctions transcendantes telles la fonction logarithme ou exponentielle et les fonctions composées à partir de celles-ci.. Il est alors possible de prolonger certaines de ces fonctions par continuité en un point x_0, d'en étudier la dérivabilité éventuelle en ce point et ainsi d'en justifier un tracé exacte.
Il est donc nécessaire très tôt de préciser le sens donné à la notion de limite d'une fonction. L'alternative se situe entre une conception uniquement intuitive de cette notion ou une formalisation mesurée du concept. En effet, il n'est pas question lors d'une première approche, d'introduire des définitions en ε,η ou d'utiliser le vocabulaire des voisinages et des ouverts liés à la topologie.
Pour le débutant en analyse, n'est-ce pas le moment de rompre avec la seule interprétation intuitive[1] ? Par exemple, peut-on fixer une définition de la limite d'une fonction en un point, comme nous l'avons fait pour les suites, en termes de valeurs approchées de la limite *l à* 10^{-m}près. Les nombres réels ayant été définis par leur DDI, comme pour les limites de suites ou la continuité en un point la définition est d'autant plus chargée de sens.

§1 Définition de la limite d'une fonction en un point.

a) comme nous l'avons précisée, dès la classe de première, la dérivabilité d'une fonction f en un point x_0, quelque soit la démarche heuristique utilisée conduit à l'étude locale au voisinage de x_0 du quotient :$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, ou à l'étude au voisinage de 0 de la fonction θ définie par $\theta(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.Cette fonction θ est définie dans un intervalle auquel 0 appartient mais θ n'est pas définie en 0.
On ne peut conclure immédiatement puisque le quotient se présent sous la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$. Le calcul de ce quotient pour des valeurs de h voisines de 0 permet en général de conjecturer le comportement de ce quotient et ainsi conclure à l'existence ou non d'une limite finie. Lorsqu'il s'agit de fonctions polynômes ou rationnelles très simples, une factorisation par h suivi d'une simplification permet de ramener l'étude locale à une fonction qui permet de conclure assez aisément.
Exemple 1 La fonction $f : x \to x^3$ est-elle dérivable en $x_0 = 2$?

[1] Je pense ici à la définition de Serge Lang dans son ouvrage "A first course of calculus". Ce mathématicien américain d'origine française préconise dans les années 1970 lors d'un premier contact au Collège (aux U SA le niveau des études dans les collèges universitaires correspond à la terminale en France) une approche à la fois empirique et intuitive du concept de limite

Pour h voisin de 0 et différent de 0, posons $\theta(h) = \dfrac{(2+h)^3 - 2^3}{h}$. La fonction θ admet-elle une limite finie en 0 ? Levons la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$ en remarquant : si $h \neq 0$ $\theta(h) = (2+h)^2 + 2(2+h) + 4 = 12 + h(h+6)$ donc $|\theta(h) - 12| = |h|(h+6)$

Puisque h est voisin de 0, il est légitime de considérer $-1 \leq h \leq 1$ et alors $|\theta(h) - 12| \leq 7|h|$

Quelque soit l'entier m, il suffit que $|h| \leq \dfrac{10^{-m}}{7}$ pour que $|\theta(h) - 12| \leq 10^{-m}$. Puisque $\dfrac{10^{-m}}{7} \leq 10^{-m-1}$ il vient finalement : quelque soit l'entier m il existe un entier p (p=m+1) te que $|h| \leq 10^{-p} \Rightarrow |\theta(h) - 12| \leq 10^{-m}$ que nous traduiront par " $\theta(h)$ est une valeur approchée de 12 à 10^{-m}près à condition que h soit une valeur approchée de 0 à 10^{-p} près." Ou encore " $\theta(h)$ tend vers 12 lorsque h tend vers 0." On notera $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h) = -\dfrac{1}{2}$. La fonction est donc dérivable en 2 et f '(2)=12.

Pour une fonction irrationnelle les calculs demandent parfois plus d'initiatives sur le thème "majorer, minorer, encadrer".

Exemple. La fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x}$ est-elle dérivable en $x_0 = 1$?

Soit $\theta(h) = \dfrac{\sqrt{2(1+h)} - \sqrt{2}}{h} = \sqrt{2}\dfrac{\sqrt{1+h} - 1}{h}$ le taux d'accroissement de f entre 1 et 1+h. Après multiplication par l'expression conjuguée de$\sqrt{1+h} - 1$:$\theta(h) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+h} + 1}$.

On peut alors conjecturer que la limite sera $l = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

A quelle conditions pour le réel h, voisin et différent de 0, le réel $\theta(h)$est-il une V.A. par défaut de $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$? Peut-on trouver un intervalle I de centre 0 tel que : si h appartient à I alors $\theta(h)$soit une V.A de $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ à 10^{-m}près ; 10^{-m}désigne un décimal aussi petit que l'on veut ?

$$\left|\theta(h) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{2}\left|\frac{1}{\sqrt{1+h}+1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}|h|\frac{1}{(\sqrt{1+h}+1)^2}$$

Puisque h est voisin de 0, il est légitime de supposer $-\dfrac{1}{2} \leq h \leq \dfrac{1}{2}$. Alors sur cet intervalle

$\left[\dfrac{-1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+h}+1}\right)^2 < \left(\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{2}}+1}\right)^2 < 2(\sqrt{2}-1)^2 < 2\times\dfrac{1}{4}$. Et $\theta(h) \leq \dfrac{\sqrt{2}}{4}|h| \leq 0{,}355|h|$.

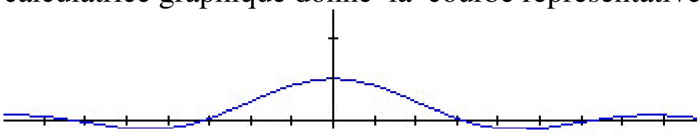
En conclusion si $|h| \leq \dfrac{1}{355}10^{-m}$ et $|h| < \dfrac{1}{2}$ alors $\left|\theta(h) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right| \leq 10^{-m}$.

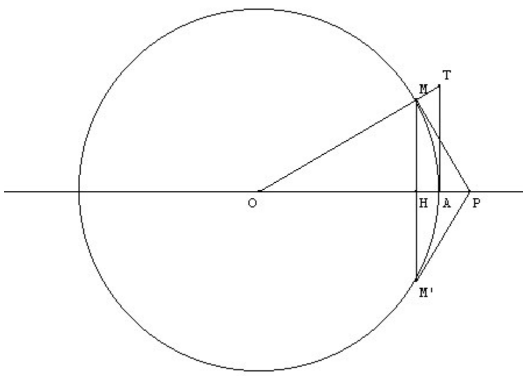
Puisque $\dfrac{1}{355}10^{-m} \leq \dfrac{1}{100}10^{-m}$, ceci est à fortiori réalisé si $|h| \leq 10^{-m-2}$

On peut résumer ainsi cette propriété : "pour tout entier m , $\theta(h)$ est une V.A. de $\frac{1}{2}$ à 10^{-m} près à condition que h soit une valeur approchée de o à 10^{-m-2} près. Ceci peut se traduire ainsi : " on peut rendre $\theta(h)$ aussi voisin que l'on veut de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ à condition de choisir h suffisamment voisin de 0", ou encore " $\theta(h)$ a pour limite $\frac{1}{2}$ lorsque h tend vers zéro". On notera $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi la fonction f est dérivable en $x_0 = 1$ et $f'(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Définition 1. Soit un intervalle I de R contenant 0 et une fonction f définie au moins sur I sauf peut-être en 0. La fonction f admet la limite *l* lorsque x tend vers 0 si et seulement si : pour tout entier naturel m il existe un entier p tel que f(x) est une V.A. de *l* à la précision 10^{-m} dès que x est une V.A. de 0 à la précision 10^{-p}. En d'autres termes :
$x \in I$ et $|x| \le 10^{-p} \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| \le 10^{-m}$.
On notera $\lim\limits_{x\to 0}(fx) = \ell$ **ou** $\lim\limits_{0} f = \ell$**.**

REMARQUE. Il n'est pas toujours facile d'utiliser cette définition. En voici un exemple : la fonction sinus est-elle dérivable en 0 peut conduire à se poser la question : la fonction θ définie sur $]-\infty;0] \cup [0;+\infty[$ par $\theta(x) = \frac{\sin x}{x}$ où x est en radian admet-elle une limite en zéro ?. La calculatrice donne des valeurs de $\theta(x)$ voisine de 1 dés lors que x est voisin de o. La calculatrice graphique donne la courbe représentative ci-dessous pour θ.





Soit l'arc MM' , il a pour mesure de sa longueur 2x en radian, $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. La longueur de l'arc MM' est définie comme la limite commune des polygones convexes inscrits et circonscrits au cercle C d'extrémités M et M'.
Donc MM'<arcMM'<PM+PM', où (PM) est la tangente en M au cercle C. Les triangles rectangles OMP et OAT sont isométriques : donc AT = PM = tanx

On peut donc conjecturer que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. Prouvons le selon la définition ci-dessus.

Donc pour $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ $\quad 2\sin x < 2x < 2\tan x$ qui équivaut à $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ (i)

Il n'est pas aisé en terminale de démontrer en terme de valeur approchée à 10^{-m} près que $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$; il faut pour cela guider l'élève vers un encadrement de cosx au voisinage de zéro, lequel est inspiré par le développement en série de cosx . Il n'est donc pas question

d'imposer la démonstration de la propriété $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ selon la définition 1. Cette limite est toujours admise au Lycée ou interprétée par l'encadrement cité.
Ainsi, poser une définition rigoureuse pour l'expression $\lim_{x\to 0}(fx)=\ell$ ne signifie pas qu'il soit pertinent ni possible de l'utiliser systématiquement. Il est évident qu'il est nécessaire d'admettre les théorèmes sur les opérations sur les limites et sur la limite et l'ordre et de les utiliser. Dans l'exemple ci-dessus le théorème des gendarmes permet de conclure à condition d'admettre en s'appuyant sur des considérations géométriques que $\lim_{x\to 0}\cos x=1$.
La donnée d'une définition du concept de limite en terminale scientifique qui n'est en fait qu'une condition suffisante peut s'appuyer première approche intuitive qui a pu être faite classe de 1°. Mais alors il n'est pas permis de démontrer et d'introduire progressivement la rationalité dans le champ de l'analyse. Encore une fois, ceci est une nécessité pour le débutant si l'on ne veut pas réduire cette discipline à un ensemble de recettes. Bien entendu ce début de formalisme ne prend de sens à ce niveau que s'il est conjugué avec les activités des élèves ou l'étudiant sur le thème "majorer, minorer encadrer " et l'étude des variations des fonctions.

Définition 1 bis. Soit un intervalle I de R contenant x_0 et une fonction f définie au moins sur I sauf peut-être en x_0. La fonction f admet la limite *l* lorsque x tend vers x_0 si et seulement si pour tout entier naturel m il existe un entier p tel que f(x) est une V.A. de *l* à la precision 10^{-m} dès que x est une V.A. de x_0 à la précision 10^{-p}.
C'est à dire : pour tout entier naturel m il existe un entier p tel que $x\in I$ et $|x-x_0|\le 10^{-p} \Rightarrow |f(x)-\ell|\le 10^{-m}$.
On notera $\lim_{x\to x_0}(fx)=\ell$ **ou** $\lim_{x_0} f=\ell$.

Remarque : la définition est équivalente à $\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=\ell$

Définition 2. Limite à droite, limite à gauche. Soit un intervalle ouvert I dont x_0 est une borne inférieure (respectivement supérieure) et une fonction f définie au moins sur cet intervalle l. La fonction f admet la limite à droite (resp. à gauche) *l* lorsque x tend vers x_0 si et seulement si pour tout entier naturel m il existe un entier naturel p tel que :
$x\in I$ et $x-x_0\le 10^{-p}$ $(\text{resp. } x_0-x\le 10^{-p})$ $\Rightarrow |f(x)-\ell|\le 10^{-m}$.
On notera $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>0}} f(x)=\ell$ $(\text{resp.} \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\ell)$ **ou encore** $\lim_{x\to x_0^+}(fx)=\ell$ (resp. $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell$)

Ces définitions permettent d'élargir le domaine des fonctions à étudier, notamment la fonction inverse au voisinage de 0 ou les fonctions composées avec la fonction "valeur absolue".

Définition 3. Limite infinie en 0. Soit un intervalle I contenant 0 ou dont 0 est une borne et f une fonction définie sur I sauf peut-être en 0. La fonction f a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque x tend vers 0 si et seulement si pour tout entier m, il existe un entier p tel que : $x\in I$ et $|x|\le 10^{-p} \Rightarrow f(x)>10^{m}$ **(rep.** $f(x)<-10^{m}$)

Définition 4 Limite en l'infini. Soit f définie sur un intervalle $[a;+\infty[$ (resp. $]-\infty;a]$) ; f a pour limite le réel *l* lorsque x tend vers $+\infty$ (rep. $-\infty$) si et seulement si pour tout entier m, il existe un réel positif B tel que : si x > B (resp. x < -B) alors $|f(x)-\ell|\le 10^{-m}$

On écrira de même la définition d'une limite infini en l'infini(définition 5)