CHAPITRE IV : PROPRIETES DES FONCTIONS CONTINUES SUR UN INTERVALLE

"LA DICHOTOMIE : OUTIL DE CALCUL ET DE DEMONSTRATION"

PRESENTATION

PRESENTATION

J'ai été inspiré, pour le choix de la dichotomie, par l'article de J.L. OVAERT « Dichotomies et variantes » dans le bulletin Inter-IREM d'Analyse n°XX paru en 1981. Dans un article sur l'approche des zéros d'une fonction, l'auteur rappelle les théorèmes démontrés à l'aide de la dichotomie par Weierstrass au XIX° siècle. Ne les ayant pas retrouvés dans les ouvrages contemporains, ne disposant pas d'une bibliographie suffisante, j'ai essayé de restituer ces démonstrations. Je ne peux évidemment assurer pour autant que la rédaction que j'ai développée soit la plus pertinente dans chaque cas. Evidemment ces démonstrations prennent une actualité nouvelle avec l'arrivée de nouveaux moyens de calculs que sont les calculatrices programmables et graphiques et les logiciels sur ordinateur. Ces outils permettent de "montrer " des calculs jusqu'à présent trop longs a effectuer, et par suite sont l'occurrence de conjectures sur certaines propriétés d'analyse élémentaire.

1) La recherche de conditions d'existence et d'unicité d'une solution d'une équation de degré trois me conduit à démontrer le théorème[1] dit de « Bolzano ». Après le développement de son aspect calculatoire par dichotomie, sa démonstration, dans la foulée, utilisant la propriété des intervalles emboîtés pour définir un réel unique est riche en procédés: raisonnement par récurrence; par disjonction des cas. C'est l'occasion, de se familiariser avec des organigrammes pour quelques routines sur les calculatrices programmables ou les ordinateurs; justifier et utiliser tests et boucles. A ce sujet, l'élève du Lycée ou le débutant en analyse ne saurait être un "consommateur λ" de la calculatrice ; il doit être à même de comprendre les logiciels les plus simples; ce qui lui permet de démystifier l'outil et d'en relativiser les possibilités.

2) Les conséquences de ce théorème sont nombreuses et accessibles: le théorème des valeurs intermédiaires bien sûr, mais surtout le cas des fonctions continues et strictement

[1] "Si f est continue sur[a,b] et f(a).f(b)>0 alors il existe a poins un réel c de[a,b] tel que f(c)=0

monotones, riches de conséquence : la définition des fonctions racines n-ièmes et exponentielles comme fonctions réciproques. Tout cela constitue une séquence déductive suffisamment conséquente pour justifier la démarche.
L''image d'un segment par une fonction continue est un segment peut également des démontrer par dichotomie; les intervalles emboîtés étant là aussi préférés à la propriété de la borne supérieure qui pose difficulté au débutant en Analyse élémentaire.

3) Avec des outils nouveaux, je reviens, sous la forme d'un problème, à la discussion de l'existence et du nombre de racines réelles de l'équation du troisième degré; mise, pour simplifier, sous la forme $x^3 + 3px + q = 0$. Dans le geste pédagogique, j'utilise souvent la démarche ternaire de Jérôme Bruner[1] : stades manipulatoire (ici, calculatoire) iconographique(celui du dessin ou du graphe) et formalisation (ici la démonstration). L'usage des calculatrices programmables trouve naturellement sa place dans ce processus, pour permettre à l'élève ou au débutant d'avancer par lui même des "conjectures"; le calcul devient un argument important, au même titre que le graphe, pour justifier et parfois donner l'intuition de la démonstration. Je pense à des routines telles: dichotomie, suites récurrentes, valeurs d'une fonction.

4) Enfin, l'approche d'une solution par dichotomie montrant sa « lenteur » relative, il importe de rechercher des suites convergeant « plus rapidement » vers la solution de l'équation. Je pense à la méthode du point fixe ou celle des tangentes qui exigent des connaissances complémentaires sur le calcul différentiel. Ce sera l'occasion dans le chapitre suivant (chap V) d'une nouvelle séquence déductive où je développe deux méthodes possibles conduisant au même résultat.

Remarque 1. A ce propos, depuis le début du siècle, le cours d'algèbre en classe de Mathématiques élémentaires se réduisait à une analyse "algébrisée"[2] avec l'étude des fonctions polynômes, rationnelles, et irrationnelles.. Mais, à l'époque, il cohabitait avec un important programme de géométrie permettant à l'élève de s'initier à l'hypothético-déductif (et ceci depuis la 4°), à l'analyse-synthèse, en fait, au raisonnement scientifique. Ce qui n'est plus le cas aujourd'hui, force est de le constater. Ceci dit, je me pose la question " peut-on rendre plus présente, aujourd'hui, la rationalité en analyse dans la démarche des débutants, notamment dans une terminale scientifique ou dans une classe de transition qui serait destinée aux futurs étudiants en mathématiques, en physique où dans les classes préparatoires ?"

Remarque2. Les éléments de solution en annexe ont pour seul objet de permettre au lecteur d'évaluer rapidement le degré de difficulté.

Remarque 3. Je précise, s'agissant ici d'un essai pédagogique réalisé avec des élèves TS, ou débutants en analyse, ce qui tient d'une activité, d'un cours ou de travaux pratiques. Pour une plus grande clarté, j'encadre tous les textes destinés à l'attention des lecteurs tels : énoncés, définitions, activités et travaux pratiques.

---

[1] Pédagogue allemand qui s'est intéressé, en autre, à l'enseignement de l'Analyse, il enseigna à Harvard vers 1960.

[2] Par la force des choses, l'hétérogénéïté des élèves, les réductions d'horaires, on tend a y revenir dans les années 2000 ; bien que les textes des programmes permettent de construire un travail plus rationnel avec les élèves

1° Partie

LE THEOREME DE BOLZANO

Sommaire : I Problématique (ACTIVITE): Résoudre $x^3 + 2x - 1 = 0$

II Théorème de Bolzano.(COURS) Démonstration

Annexe 1 : Eléments de solution des § I et II

I PROBLEMATIQUE

§1 Stade graphique(iconographique)

Résoudre dans R l'équation: $x^3 + 2x - 1 = 0 (1)$

Soit la fonction f définie sur R par $f(x) = x^3 + 2x - 1$

1° question. Démontrer que f est strictement croissante[1] sur R. Tracer sa courbe représentative Cf.

2° question. Que peut-on conclure sur l'équation (1) ?

§2 Stade du calcul(manipulatoire)

Objectif : Calcul de valeurs approchées de α, la solution appartenant à [0,1], dont l'existence est acquise au I. On pose: a=0, b=1 et m = (a+b)/2 = 1/2. Trois cas sont possibles, illustrés par les figures ci- dessous. Dans le premier cas, (fig1), f(1/2)< 0. Dans le second cas, f(1/2) =0 (fig2). Enfin dans le dernier cas, f(1/2)> 0, (fig3)

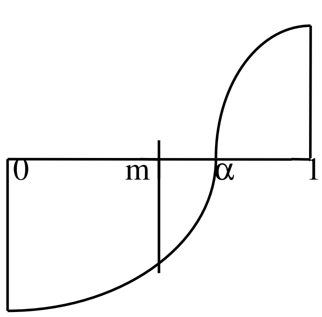


fig1

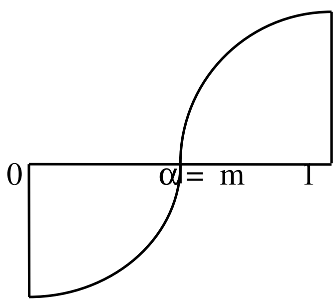


fig2

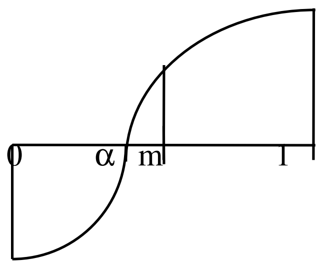


fig3

Si f(1/2) < 0: $\frac{1}{2} < \alpha < 1$; posons $a_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}$; $b_1 = b = 1$; donc $a_1 \leq \alpha \leq b_1$

Si f(1/2) = 0: $\alpha = 1/2$ est la solution conjecturée.

Si f(1/2) >0 : $0 < \alpha < \frac{1}{2}$; posons $a_1 = a = 0$ et $b_1 = \frac{a+b}{2}$; Donc $a_1 \leq \alpha \leq b_1$.

Ainsi α est situé dans un intervalle de longueur 1/2

[1] f somme de deux fonctions croissantes sur R est donc croissante sur R..

Réitérons sur l'intervalle $[a_1, b_1]$.

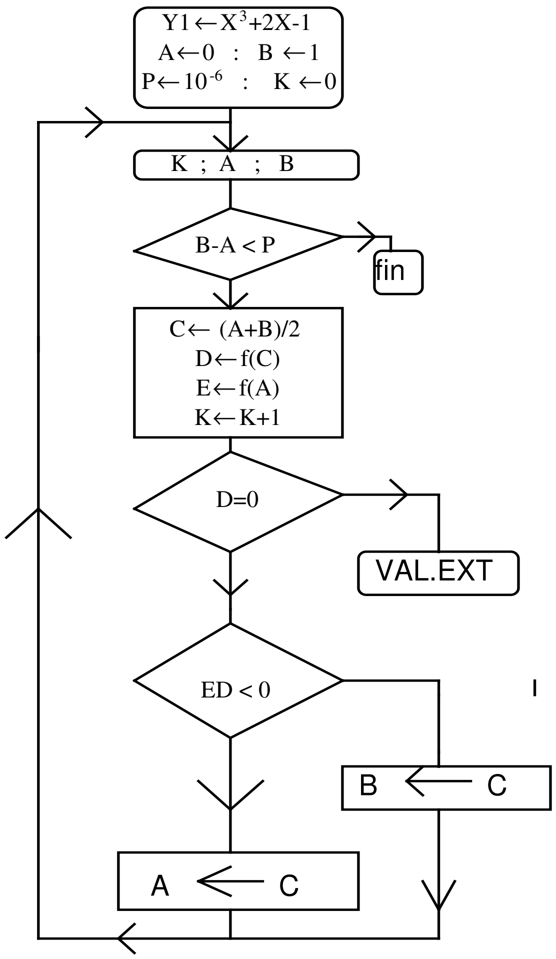
Si $f(a_1).f(\frac{a_1+b_1}{2})<0$ alors $0<\alpha<\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$; posons $a_2=a_1$ et $b_2=\frac{a_1+b_1}{2}$;donc $a_2<\alpha<b_2$

Si $f(a_1).f(\frac{a_1+b_1}{2})\geq 0$ alors $\frac{1}{2}<\alpha<1$; posons $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$ et $b_2=b_1$; donc $a_2\leq\alpha\leq b_2$.

Ainsi α est encadré dans un intervalle de longueur moitié 1/4, dont les bornes sont déterminées de façon unique. En réitérant ce raisonnement, on construit ainsi, termes après termes, deux suites (a_n) et (b_n)

telles que : $a_0 \leq a_1 \leq .... \leq a_n \leq \alpha \leq b_n \leq .... \leq b_1 \leq b_0$ avec $a_0=0$ et $b_0=1$.

Organigramme relatif au programme de la question 1



initialisons les données.
f va en Y1, 0 dans A, 1 dans B, et la précision dans P. Enfin 0 va dans K.

Afficher: K, A, et B

Si B-A<P, arrêt des calculs

Sinon faire les actions ci-contre.

Si D=0, C est valeur exacte de α.
Sinon, comparer ED à 0.Si ED < 0, alors C va dans B ; sinon C va dans A________ puis dans les deux cas, on répète la séquence à partir de: afficher K, A et B.

1° question Suivre l'organigramme ci-joint, et réaliser sur votre calculatrice le programme permettant de calculer les premiers termes des suites (a_n) et (b_n) ; et ceci de $n=0$ à $n=20$.

2° question Que peut on déduire pour chacune des suites (a_n) et (b_n) ?

3° question. Démontrer que le processus ne s'arrête pas: c'est à dire que $f(\frac{a_n + b_n}{2}) = 0$ est impossible. On raisonnera par l'absurde en montrant que α ne peut-être un nombre rationnel.

Conclusion de l'activité

a) La courbe représentative montre très bien que l'équation (1) a une solution unique α.
b) Cette solution n'est pas un nombre rationnel.
c) Peut-on le définir, la caractériser avec plus de rigueur?

Ces questions légitiment le stade formel, celui de la démonstration qui, utilisant un statut, certes non définitif, mais plus précis à ce nombre α, donnera en même temps les raisons de la propriété qui tiennent à la continuité en un point de f. C'est que nous appellerons " Le théorème de Bolzano". Rappelons que Cauchy dans son cours a l'école polytechnique (1821) admet que le tracé de la courbe suffit à démontrer l'existence d'une solution. Mais dans l'annexe de son ouvrage, en recherchant une approximation de cette solution, il "démontre" en fait le théorème de Bolzano par une variante de la dichotomie.

II DEMONSTRATION DU THEOREME DE BOLZANO

§3 Le stade formel

Formulation du problème.

Soit f, définie et continue sur [a,b], où a et b sont des nombres décimaux et f(a) et f(b) de signes contraires.

L'équation f(x) = 0 (i) admet-elle des solutions dans [a,b] ?

A Dichotomie

Supposons f(a) > 0 et f(b) < 0; posons $m = (\frac{a+b}{2})$.

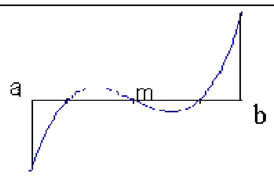


fig1 $f(m) = 0$

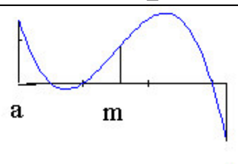


fig 2 $f(m) > 0$

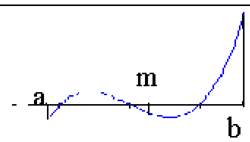


fig 3 $f(m) < 0$

Ou bien $f(m) \geq 0$; posons alors $a_1 = a$ et $b_1 = m$ (voir fig 2).

- Si $f(m) = 0$, b_1 est solution de l'équation (1); la recherche est terminée.(voir fig 1)
- Ou bien $f(m) < 0$; posons $a_1 = m$ et $b_1 = b$. (voir fig3)

Si $f(m) \neq 0$: f est définie sur $[a_1, b_1]$ de longueur $\frac{b-a}{2}$;et $f(a_1) < 0$ et $f(b_1) > 0$

et de plus $a \leq a_1 \leq b_1 \leq b$. On dit que $[a_1, b_1]$ est emboîté dans l'intervalle [a,b].
uisque $f(a_1)$ et $f(b_1)$ sont de signes contraires, on peut refaire le même raisonnement sur $[a_1; b_1]$:

- Ou bien $f(\frac{a_1 + b_1}{2}) = 0$, alors $\frac{a_1 + b_1}{2}$ est solution de (1).

- Ou bien $f(\frac{a_1+b_1}{2}) \neq 0$, alors de la même façon que ci-dessus, on détermine un intervalle $[a_2, b_2]$ tel que $f(a_2) < 0$, $f(b_2) > 0$

  De plus $a \leq a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1 \leq b$ et $b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}$

Et $[a_2; b_2] \subset [a_1; b_1] \subset [a, b]$

B Récurrence

Soit un entier n fixé, supposons que nous ayons déterminé par la méthode ci-dessus, pour tout entier $k \in \{1,2,\ldots\ldots;n\}$ un intervalle $I_k = [a_k; b_k]$ dont les bornes sont décimales et tel que:

$$\begin{cases} a = a_0 \leq a_1 \leq \ldots\ldots\ldots \leq a_k \leq b_k \leq \ldots\ldots\ldots b_1 \leq b_0 \quad \text{ou} \quad I_k \subset I_{k-1} \subset \ldots \subset I_1 \subset I_0 & (1) \\ b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k} & (2) \\ f(a_k) < 0 \text{ et } f(b_k) > 0 & (3) \end{cases}$$

Considérons $f(a_n)f(\frac{a_n+b_n}{2})$, deux cas sont possibles:

- $f(a_n).f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq 0$; posons $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.

- $f(a_n).f(\frac{a_n+b_n}{2}) < 0$; posons $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$

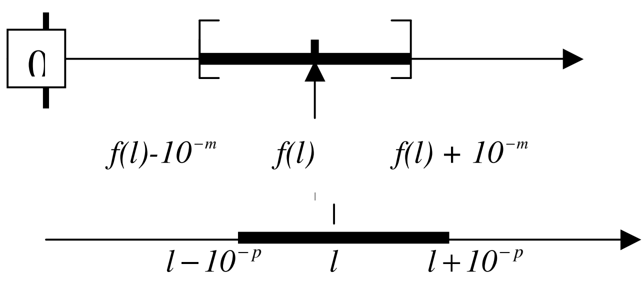
Alors les propriétés (1) (2) et (3) ci-dessus sont encore vraies au rang n+1.

Lorsqu'il existe un entier n_0 tel que $f(\frac{a_{n_0}+b_{n_0}}{2}) = 0$, alors la solution α est un nombre décimal, puisque que a et b le sont.

Ainsi nous avons construit les suites (a_n) et (b_n) *de nombres décimaux adjacentes. Leur limite commune l vérifie:*

$l = \lim(a_n) = \lim(b_n)$; et $\forall\ p \in N^*\ \ a_p \leq l \leq b_p$; $f(a_p) < 0$ et $f(b_p) > 0$.

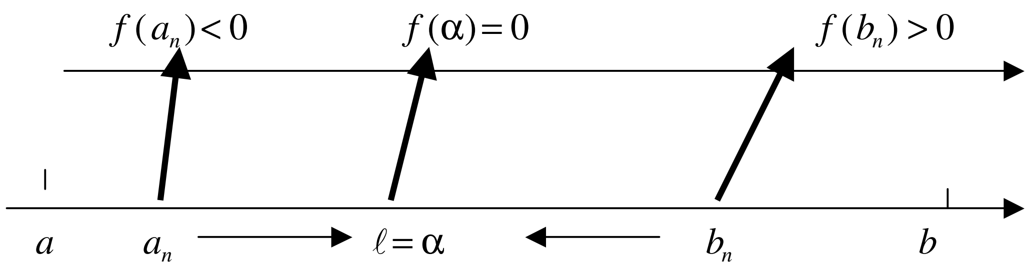
On peut aussi traduire ceci en disant que nous avons construit une suites d'intervalles emboîtés : $I_0 \supset I_1 \supset \ldots\ldots\ldots \supset I_{n-1} \supset I_n$ et $\bigcap_{n \in N} I_n = l$ *(cf Chap II th3)*



Supposons f continue sur [a,b], en particulier en l et f(l)>0. Il existe donc un entier m tel que $f(l) - 10^{-m} > 0$ *(cf figure ci-dessus). L'entier m étant donné, la continuité de f en l assure l'existence d'un entier p tel que* $f(x) \in [f(l) - 10^{-m}; f(l) + 10^{m}]$. *dès que* $x \in [l - 10^{-p}; l + 10^{-p}]$; *alors f(x) >0 lorsque* $x \in J = [l - 10^{-p}; l + 10^{-p}]$. *Or, pour k suffisamment grand, l' intervalle* $I_k \subset J$ *car la longueur de ces intervalles tend vers 0 avec k. En particulier*

a_k est tel que $f(a_k)>0$. Ceci contredit la construction des a_k, donc f(l) ne peut être > o. De même on démontre que f(l) ne peut être <0 .

Donc nécessairement f(l)=0 et l est une solution de (i). Posons désormais $l = \alpha$.



Quelles sont les raisons de la vérité de cette propriété ? La "**démonstration**" nous les a montrées. Tout d'abord, deux suites adjacentes ont même limite. (Proposition qui donnent un statut précis aux nombres réels qui sont des limites de suites obtenues de cette façon) Puis enfin la continuité de f sur [a,b], en particulier en *l.* Notons que la monotonie de f n'est pas nécessaire au résultat.

Théorème 1. (de BOLZANO) Soit f continue sur [a,b] ; si f(a) et f(b) sont de signes contraires, alors l'équation f(x)=0 admet au moins une solution α appartenant à l'intervalle [a,b]. (le réel α est défini comme la limite commune de deux suites adjacentes construites par dichotomie).

Applications .Dans les exercices suivants, il importe de bien mettre en évidence les hypothèses du théorème de Bolzano.

Exercice 1 a) Soit l'équation $x^3+x+1=0$ (i) sur R, démontrer que l'équation (i) admet une solution et une seule $\alpha \in$ [-1,0]. Construire, par dichotomie, deux suites adjacentes de nombres décimaux approchant α. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $a_{n_0} \le \alpha \le b_{n_0}$ et $b_{n_0} - a_{n_0} \le 10^{-6}$. Calculer a_{n_0} et b_{n_0}. b) Mêmes questions pour l'équation $x^3+3x+1=0$ sur R.

Exercice 2 a) Soit l'équation: $x \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$ $\tan x - x = 0$ (i) Démontrer que l'équation (i) admet une solution et une seule $\alpha \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$. Construire, par dichotomie, deux suites de nombres décimaux approchant α. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $a_{n_0} \le \alpha \le b_{n_0}$ et $b_{n_0} - a_{n_0} \le 10^{-6}$. Calculer a_{n_0} et b_{n_0}

b) Mêmes questions pour : $e^{4x} - x - 100 = 0$.

2°Partie

LE THEOREME DES VALEURS INTERMEDIAIRES

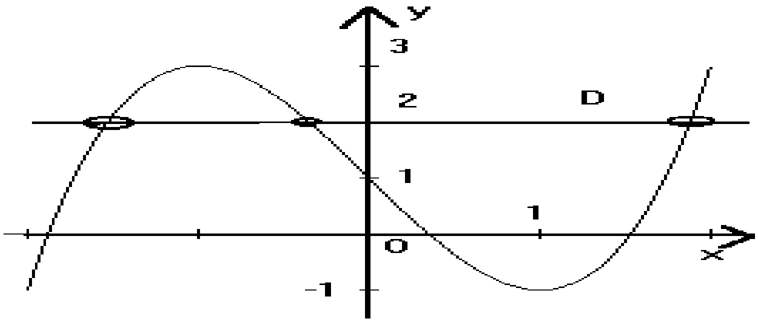
I Evidences graphiques et approximation des solutions
II Démonstration du théorème des valeurs intermédiaires

I EVIDENCES GRAPHIQUES ET APPROXIMATION DES SOLUTIONS

Soit l'équation dans R : $x \in [-3,3]$ $x^3 - 3x + 1 = 2$ (1)

on définit sur $[-3,+3]$ g par $g(x) = x^3 - 3x + 1$

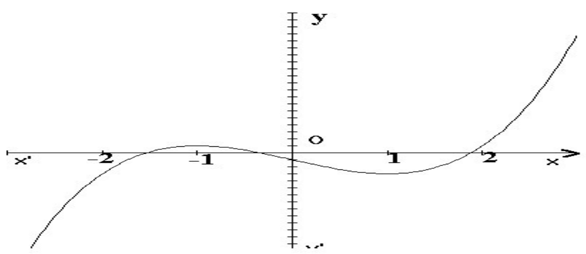
GRAPHIQUEMENT: Soit C_g la courbe représentative de g ; on peut la tracer suffisamment soigneusement pour isoler les solutions de l'équation (1).



Les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$, le résultat, intuitif selon lequel une équation polynôme de degré trois ne saurait avoir plus de trois solutions réelles[1] ; tout ceci nous permet de conclure qu'il n'y aura pas d'autre solution à l'équation (1) que celles observées à partir du graphe.

On constate que Cg coupe la droite (D) en trois points ; il est donc légitime de conclure que l'équation (1) admet 3 solutions distinctes α, β et γ. L'existence de ces solutions pour une équation de degré 3 tenant à l'observation de la courbe représentative; il reste à en réaliser un calcul approché pour chacune d'elles ; et par dichotomie, seule méthode à notre disposition pour l'instant. Soit donc l'équation: $x \in [-3,3]$ $g(x) = 2$ (2). Géométriquement, il est clair qu'en appliquant au graphe ci-dessus la translation de vecteur $-2\vec{j}$, on est ramenée à une fonction vérifiant, sur des intervalles à déterminer, les hypothèses du théorème de Bolzano. Ainsi, l'équation (2) équivaut sur [-3,3] à : $x^3 - 3x - 1 = 0$ (3)

Soit la fonction h définie sur I = [-3,3] par $h(x) = x^3 - 3x - 1$.



Le graphe de h ci-contre permet de localiser les trois solutions : $\alpha \in [-2,-1]$, $\beta \in [-1,0]$ et $\gamma \in [1,2]$. Qui plus est, les hypothèses du théorème de Bolzano sont réalisées sur chacun des trois intervalles ci-dessus pour la fonction h. L'utilisation du programme mis au point au chapitre I donne :

$-1,532089 < \alpha < -1,532088$

$-0,347296 < \beta < -0.347295$

$1.879384 < \gamma < 1.879385$

la précision ayant été fixée à 10^{-6}.

REMARQUE. Pour démontrer que la propriété ci-dessus est généralisable, l' étude graphique et géométrique nous incline à appliquer le théorème de Bolzano à la fonction : $x \to f(x) - k$.

II THEOREMES DES VALEURS INTERMEDIAIRES

Théorème 2_ Si f est une fonction continue sur [a,b], ALORS pour tout réel k de l'intervalle [f(a) ,f(b)], il existe au moins un réel c de l'intervalle [a,b] tel que f(c) = k

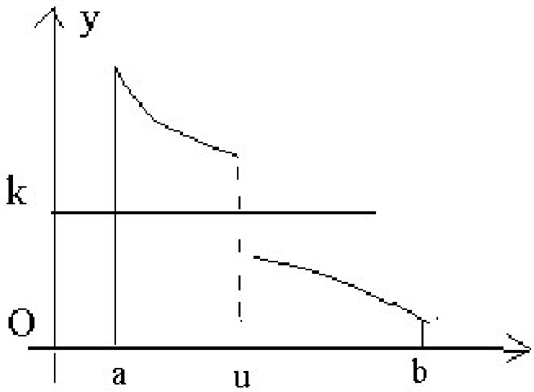


fig1 (f non continue en u)

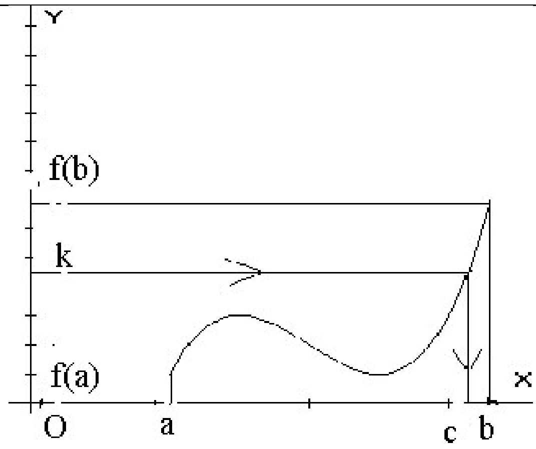


fig2

Preuve. Si k = f(a) ou f(b) , alors c = a ou b. Si k ≠ f(a) et k ≠ f(b), supposons f(a) < f(b) (si f est constante sur [a,b] ,la preuve est évidente) et donc $k \in \left]f(a), f(b)\right[$. Posons g la fonction définie par : $x \in [a, b]$; $g(x) = f(a) - k$.

La fonction g est continue sur [a,b] ;de plus , g(a) =f(a) -k :_g(a) < 0

; g(b) = f(b) - k :_g(b) > 0

Les hypothèses du théorème de Bolzano sont réalisées pour g : il existe donc au moins un réel c de [a,b] tel que g(c) = 0. De plus: $c \in \left]a, b\right[$ car $f(a) \neq k$ et $f(b) \neq k$.Ainsi f(c) = k.

Interprétation_: tout réel compris entre f(a) et f(b) est une valeur prise par f ; d'où le nom donné à ce théorème. Sur la fig1, f n'est pas continue en u, donc sur [a,b], et le réel k n'est pas toujours une valeur prise par f.

APPLICATION sur un exemple.

Discutons, selon les valeurs du réel k , le nombre de solutions de l'équation $x^3 - 3x + 1 = k$ (1). Mais cette fois nous disposons du théorème 2.

La fonction g définie sur I = [-3,3] par: $g(x) = x^3 - 3x + 1$ est continue sur I ; g(-3) = -17 , g(3) = 19. Donc pour tout réel k de [-17,19] ,l'équation (1) admet au moins une solution. Revenons à l'équation dans R : $x^3 - 3x + 1 = 2$ (1).

Sur chacun des intervalles [-3,-1] , [-1,1] et [1,3] , g est strictement monotone.

Soit g_1 la restriction de g à l'intervalle [-3,-1] ; elle est continue et strictement croissante ; supposons qu'il existe deux antécédents α et β du réel 2 par g_1 dans l'intervalle [3,-1].; ce qui contredit $g_1(a) = g_1(b) = 2$. Ainsi α est l'unique antécédent de 2 par g_1. On procède de même sur les autres intervalles [-1,1] et [1,3]. En conclusion , l'équation du § I admet trois solutions réelles distinctes : $\alpha, \beta, \text{et}\ \gamma$ telles: $-3 < \alpha < -1 < \beta < 1 < \gamma < 3$

Remarquons que pour isoler chacune des solutions, nous considérons des intervalles sur lesquels la fonction est strictement monotone; il est tant de statuer dans le cas général.

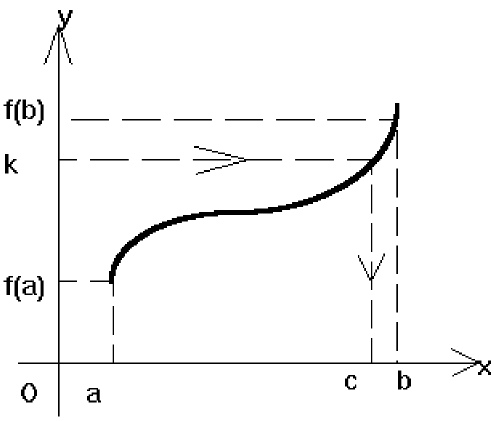
III CAS DES FONCTIONS CONTINUES ET STRICTEMENT MONOTONES

- Si f est continue et croissante sur I = [a,b] (a<b) ;

$$\forall x \in [a, b] \quad ; \quad f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

Ainsi f(a) et f(b) sont respectivement le minimum et le maximum de f sur [a,b].

- Si de plus f et strictement croissante sur [a,b] ; pour tout réel k de [f(a),f(b)] , considérons l'équation : f(x) = k

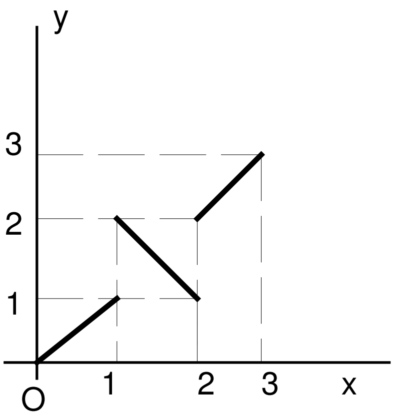


Elle admet au moins une solution d'après le thm2
Supposons qu'il y ait deux solutions distinctes c et d; reprenons le raisonnement ci-dessus: avec c < d alors f(c) < f(d) . Ceci contredit l'assertion "f(c) = f(d) = k " ; donc <u>c est unique</u>. On dit que f réalise une bijection de [a,b] sur [f(a),f(b)]

Théorème3. Si f est continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur [a,b], ALORS f est une bijection de [a,b] sur [f(a),f(b)] . (resp. sur [f(b),f(a)]).

Corollaire Si f est continue et strictement monotone sur [a,b] et de plus $f(a)f(b) < 0$ ALORS l'équation: $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [a,b]$.

Donc dans le cas d'une fonctionn continue et strictement monotone, nous avons montré que l''image du segment [a,b] est un segment [m,M] de R.
m et M sont respectivement le minimum et le maximum de f sur [a,b]; et ces bornes sont effectivement atteintes. En d'autres termes : " $\forall k \in [m,M] \quad \exists c \in [a,b]$ tel que : $f(c) = k$"
Exemple : Soit f : x→ sinx, définie sur [0,π] ; l'image de cet intervalle est le segment [-1,1].
attention : La réciproque du théorème4 est fausse. Voyons un contre-exemple sur la figure ci-dessous: Ici f n'est pas continue sur [0,3], cependant c'est une bijection de cet intervalle sur lui même



$$x \in [0,1[\quad f(x) = x$$
$$x \in [1,2[\quad f(x) = -x-3$$
$$x \in [2,3] \quad f(x) = x$$

Théorème 5. Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I de R (fermé ou non),ALORS l'image de I par f est un intervalle de R (fermé ou non).
Corollaire. Si f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I de R ALORS f est une bijection de I sur f(I).

Supposons que le réel k de l'intervalle f(I) soit l'image par f de deux réels distincts; ceci contredit la stricte monotonie de f .
Exemples de situations où s'applique le Corollaire ci-dessus : f est supposée continue et strictement croissante sur I.

$I =]a,b]$; $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$: f est une bijection de I sur $]\ell, f(b)]$

- $I =]-\infty, b]$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \ell$: f est une bijection de I sur $]\ell, f(b)]$
- $I =]-\infty, +\infty[$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \ell'$: f est une bijection de I sur $]\ell, \ell'[$

Exercice1. Soit f définie sur I= [0,6] par $f(x) = |x^2 - 4x|$;déterminer l'intervalle image par f de I. Discuter , selon les valeurs du réels k le nombre de solution de l'équation : f(x) = k.

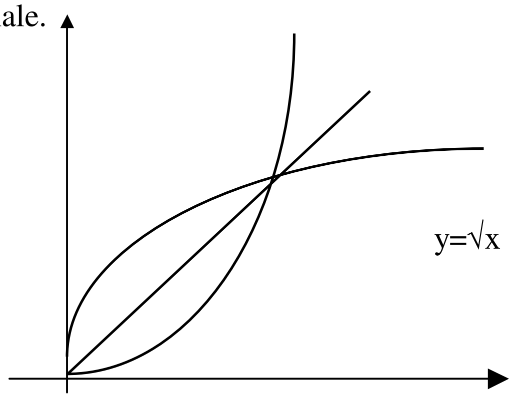
exercice2 Soit f définie sur R par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$; démontrer que f est une bijection de R sur un intervalle que l'on déterminera.

IV APPLICATION 1 : FONCTIONS RACINES NIEMES

§1 Fonction racine carrée

$f\begin{cases} R^+ \to R \\ x \to x^2 \end{cases}$ est continue, strictement sur $[0,+\infty[$,et $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

D'après le corollaire du Théorème 5, f est une bijection_ de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$. Elle admet une bijection réciproque, notée f^{-1} qui est aussi continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, ces deux propriétés pour f^{-1} étant admises en terminale.



$\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in [0,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(y) \\ y \in [0,+\infty[\end{cases}$

On note $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ donc

$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ x \in [0,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ x \in [0,+\infty[\end{cases}$

Propriété $C_{f^{-1}}$ et C_f sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère.[1]

Exercice. Calculer un encadrement de $\sqrt{2}$ de longueur 10^{-6} par dichotomie:

Utilisons le programme dichotomie du chapitre 1 § II en initialisant ainsi :

$Y_1 = X^2 - 2$, $A = 1$, $B = 2$; $P = 10^{-6}$ $Y_1 = X^2 - 2$, $A = 1$, $B = 2$; $P = 10^{-6}$

$a_{20} = 1{,}414213181$ $b_{20} = 1{,}414214134$ $a_{20} = 1{,}414213181$ $b_{20} = 1{,}414214134$

Donc 20 dichotomies sont nécessaires pour approcher $\sqrt{2}$ à moins de 10^{-6}. La recherche de méthode "plus rapide" pour approcher $\sqrt{2}$ se pose ici.

§2 Fonction racine cubique

$f\begin{cases} R^+ \to R \\ x \to x^3 \end{cases}$ est continue et strictement croissante sur$[0,+\infty[$, $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

D'après le corollaire c'est une bijection, elle admet donc une bijection réciproque notée f^{-1}, nous admettrons qu'elle est aussi continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

[1] La réflexion d'axe D(y = x) transforme M(x,y) en M'(y,x).

On note: $\begin{cases} y = \sqrt[3]{x} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^3 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt[3]{125} = 5$, on note aussi : $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

Exercice Calculer un encadrement de $\sqrt[3]{2}$ de longueur 10^{-6} par dichotomie:

$\begin{cases} x = \sqrt[3]{2} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$

$a_{20} = 1{,}259920120$ $b_{20} = 1{,}259921074$

§3 fonction racine n-ième

$f\begin{cases} R^+ \to R^+ \\ x \to x^n \end{cases}$ n entier ≥ 2 est continue et strictement croissante sur R^+.

$f(0) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Donc, f admet une bijection réciproque également continue et strictement croissante sur R^+.

On note : $\begin{cases} y = \sqrt[n]{x} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^n \\ y \geq 0 \end{cases}$

Exercice. Déterminer un encadrement de $\sqrt[5]{2}$ par dichotomie de longueur 10^{-6}.
On trouve $a_{20} = 1{,}148697$ et $b_{20} = 1{,}148698$.

V APPLICATION 2 : ISOLER LES ZEROS D'UNE FONCTION.

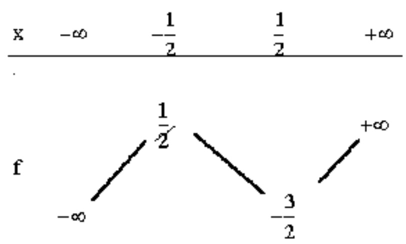
Exemple. Soit l'équation : $x \in R, 4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$ (E)

1°question. Etudier de façon sommaire le sens de variation de la fonction f : $x \to 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$, définie sur R.

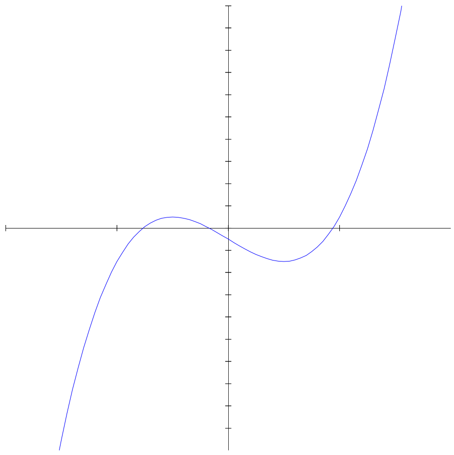
2°question. Démontrer que l'équation (E) admet trois solutions réelles α, β et γ , appartenant à trois intervalles de longueur 0,5.

3°question. Calculer , par dichotomie , un encadrement de chacune des solutions à la précision 10^{-6}.

Eléments de solution



1°question



2°question a) la restriction f_1 de f à $I = \left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ est continue et strictement croissante ,d'après le corollaire du th5 ci-dessus ,c'est une bijection de I sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$. 0 appartient à l' intervalle image ,donc admet un unique antécédent α par f , de plus $f(-1)f(-\frac{1}{2})<0$; donc $\alpha \in \left]-1,-\frac{1}{2}\right[$. b) , c) On procède de même sur les intervalles $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$.

3°question Avec le programme réalisé au chapitre 1 § II , on trouve les encadrements:

$$-0{,}766045 \le \alpha \le -0{,}766044$$

$$-0{,}173649 \le \beta \le -0{,}173648$$

$$0{,}939692 \le \gamma \le 0{,}939693$$

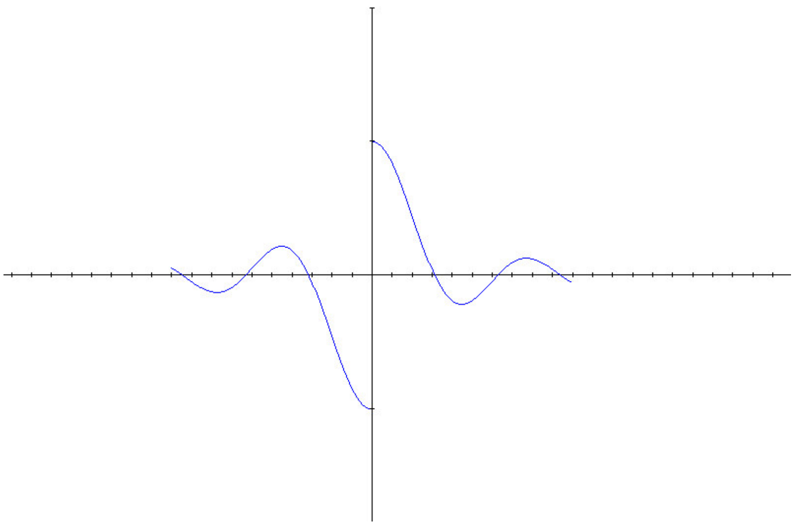
EXERCICES Mêmes questions pour les équations suivantes:
Isoler et calculer un encadrement de longueur 10^{-6} des solutions éventuelles des équations suivantes:

$$x \in R;\quad x^3 - 3x - 1 = 0$$

$$x \in R;\quad x^3 - 6x^2 - 15x + 15 = 0$$

VI THEOREMES SUR LES FONCTIONS CONTINIUES sur un intervalle.

$$\boxed{x \to \frac{\sin x}{|x|}}$$



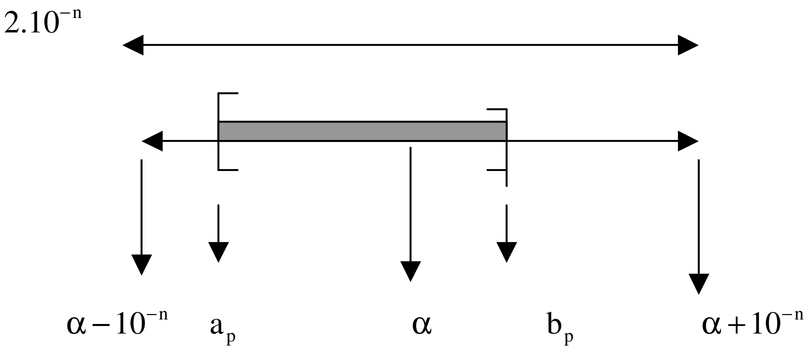
Dans ce qui précède, la monotonie est associée à la continuité de la fonction sur un intervalle. Qu'en est-il de l'image d'un segment par une fonction continue et non nécessairement monotone ? L'intuition graphique permet de conjecturer que l'image est encore un segment. Soit la fonction définie sur [-10,10] par : si $x \neq 0\ f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$ et $f(o)=1$. Le graphe ci-dessus montre que si le maximum 1 est atteint en 0, le minimum -1 ne l'est pas. En effet f est définie en 0 mais n'est pas continue en zéro et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$.

Lemme. Toute fonction continue f sur un segment [a,b] est bornée.

Raisonnons par l'absurde en supposant que f ne soit pas bornée sur I = [a,b]. Soit L = b-a la longueur de cet intervalle. **Pratiquons à nouveau la dichotomie en partageant l'intervalle I en deux intervalles de même longueur.**

Posons $m=\dfrac{a+b}{2}$. La fonction f est non bornée sur l'un au moins des deux intervalles [a, m] ou [m,b]. Supposons que ce soit sur l'intervalle [a, m], posons alors $a=a_1$ et $m=b_1$. Cet intervalle $I_1=[a_1,b_1]$ a pour longueur $\dfrac{L}{2}$. Le même raisonnement fait sur l'intervalle $[a_1,b_1]$ nous conduit à l'existence d'un intervalle $I_2=[a_2,b_2]$ de longueur $\dfrac{L}{2^2}$ emboîté dans le précédent et sur lequel f n'est pas bornée. L'axiome de la division d'un intervalle de R permet de poursuivre la construction d'une suite d'intervalles emboîtés I_n qui définissent un réel unique α. La longueur de l'intervalle I_n est $\dfrac{L}{2^n}$ et f est non bornée sur chacun d'eux.

Puisque f est continue sur [a,b], en particulier en α, soit un entier m donné, il existe un entier n tel que f(x) est une V.A. de $f(\alpha)$ à 10^{-m} près à condition que x soit une V.A. de α à 10^{-n} près. C'est à dire : Si $\alpha-10^{-n}\le x\le \alpha+10^{-n}$ alors $f(\alpha)-10^{-m}\le f(x)\le f(\alpha)+10^{-m}$ (i)



Puisque la suite géométrique de terme général $\dfrac{L}{2^n}$ converge vers 0, pour l'entier n trouvé ci-dessus, il existe un entier q tel que si p≥ q alors $\dfrac{L}{2^p}\le 10^{-n}$. Alors I_p est inclus dans l'intervalle $[\alpha-10^{-n};\alpha+10^{-n}]$ et f n'est donc pas bornée sur I_p(cf relation (i) ci-dessus). Ceci est contraire à l'hypothèse, d'où le résultat annoncé.

Théorème 6 L'image d'un segment [a, b] par une fonction continue f est un segment [m,M]

Puisque si f est continue sur I = [a,b], elle est bornée ; soit M la borne supérieure et m la borne inférieure de la partie bornée de R notée J = f(I). C'est à dire pour tout x de [a,b], $m \leq f(x) \leq M$. Démontrons que les bornes m et M sont des valeurs atteintes par f.

Raisonnons par l'absurde en supposant que ce ne soit pas le cas. C'est à dire il n'existe pas de réel c de I tel que f(c) = M . De même il n'existe pas de réel d de I tel que f(d) = m.

Alors les fonctions g et h définies respectivement par : $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ et $h(x) = \dfrac{1}{f(x) - m}$ sont définies, continues et strictement positives sur le segment I = [a,b].

D'après le Lemme ci-dessus, g est bornée sur ce segment, donc la partie g(I) bornée de R admet une borne supérieure ; soit M'.

$\forall x \in [a,b] \quad 0 \leq \dfrac{1}{M - f(x)} \leq M'$ donc $\forall x \in [a,b] \quad M - f(x) \geq \dfrac{1}{M'}$

ainsi $\forall x \in [a,b] \quad f(x) \leq M - \dfrac{1}{M'}$. Ceci contredit l'assertion selon laquelle M est la borne supérieure de f(I). D'où la contradiction : la borne supérieure est donc atteinte, il existe c de l'intervalle [a,b] tel que f(c) = M. De même en raisonnant avec h, on montre que la borne inférieure est atteinte. En conclusion le théorème.

Corollaire. L'image d'un intervalle I de R par une fonction f continue sut I est un intervalle de R.

Rappel. La partie I de R est un intervalle si et seulement si pour tous réels a et b de I le segment [a,b] est inclus dans I.

Si f est continue sur 'intervalle I, soient deux réels α et β de J = f(I). Il existe a et b de I tels que f(a) =α et f(b) = β. Ainsi $[\alpha,\beta]$= [f(a),f(b)] est un intervalle inclus dans f(I) d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

3° PARTIE

DISCUSSION DE L'EQUATION $X^3 + 3pX + q = 0$

I Forme réduite de l'équation du troisième degré

II Nombre de solutions de $x^3 + 3px + q = 0 \quad (q < 0)$

III Cas de trois solutions distinctes.

Annexe 2 Eléments de solution des problèmes.

Disposant désormais des théorèmes sur les fonctions continues sur un intervalle[1], il est possible de statuer sur l'existence et le nombre de solutions réelles dans le cas général:

$$aX^3 + bX^2 + cX + d = 0 \quad (a \neq 0)$$

On peut le faire sous la forme d'un problème proposé aux élèves dans la rubrique: travaux pratiques.

TRAVAUX PRATIQUES

I FORME REDUITE DE L'EQUATION DU 3° DEGRE

Soit P un polynôme de degré 3, à coefficients réels tel que: $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$

1°question a) On pose X= x+h. Montrer que l'on peut trouver une valeur de h pour laquelle P(X) s'écrive: a.Q(x) , où Q est un polynôme de la forme suivante :

$Q(x) = x^3 + 3px + q$; $p \in R$; $q \in R$. Montrer que P et Q ont le même nombre de racines réelles. On dira que Q est la forme réduite de P.

b) Déterminer la forme réduite des polynômes suivants:

$$P(X) = X^3 - 6X^2 + 15X - 15$$

$$P(X) = X^3 - 5X^2 + 2X + 1$$

2°question a) Dans la suite, on désignera par (E) l'équation réduite : $x^3 + 3px + q = 0$

Résoudre (E) dans le cas p=0, ou q=0.

b) On suppose désormais p≠0. Démontrer que :

$$x^3 + 3px + q = 0 \; \alpha \text{ solution de (E)} \quad \Leftrightarrow \quad -\alpha \text{ solution de } x^3 + 3px - q = 0$$

On supposera désormais dans la suite du problème que $q < 0$.

II NOMBRE DE SOLUTIONS DE L'EQUATION $x^3 + 3px + q = 0 \quad (q < 0)$

1°question a) Soit f définie sur R par $f(x) = x^3 + 3px + q$, $p > 0$, et $q < 0$.

Etudier les variations de f, en déduire que l'équation (E), dans ce cas, admet une solution unique.

b) Démontrer que l'équation: $x^3 + 3x - 1 = 0$ admet une solution unique que l'on isolera dans un intervalle d'amplitude 1.

2°question Soit l'équation (E) : $x^3 + 3px + q = 0$ avec $q < 0$. On suppose désormais $p < 0$.

a) Etudier les variations de f. On pose $M = f(-\sqrt{-p})$ et $m = f(\sqrt{-p})$.

b) Démontrer que M a le signe du réel $-(4p^3 + q^2)$

c) Démontrer les propositions suivantes:

$4p^3 + q^2 > 0 \quad \Leftrightarrow$ (E) admet une solution unique

$4p^3 + q^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$ (E) admet deux solutions dont $-\sqrt{-p}$

$4p^3 + q^2 < 0 \quad \Leftrightarrow$ (E) admet trois solutions distinctes

[1] Il n'est pas déplacé d'utiliser ici le principe de Lagrange puiqu'il est admis en 1°; il sera démontré lors de la 4° partie de cet essai. Cette pratique et courante dans le contexte de l'acquisition progressive d'un savoir.

d) En déduire le nombre de solutions des équations suivantes:

$x^3-3x-1=0$; $x^3-3x-2=0$; $x^3-3x+5=0$

En résumé: Si l'on pose $\Delta = 4p^3+q^2$. La discussion du nombre de solutions de l'équation réduite $x^3+3px+q=0$ avec $q<0$ s'ecrit :

p
- $p>0$ solution unique
- $p<0$
  - $\Delta > 0$ une solution unique
  - $\Delta = 0$ deux solutions dont $-\sqrt{-p}$
  - $\Delta < 0$ trois solutions distinctes

III CAS DE TROIS SOLUTIONS DISTINCTES.

Etude d'un exemple

1°question. Soit l'équation dans R : $4x^3-3x-\frac{1}{2}=0$ (1)

a) Démontrer que (1) admet trois solutions réelles distinctes appartenant à [-1,1]. Donner un encadrement de longueur ½ pour chacune d'elles.

b)Démontrer la formule $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ on posera $x=\cos\theta$ dans l'équation (1). En déduire les valeurs exactes des trois solutions réelles (à l'aide de la fonction cosinus); donner des valeurs approchées de chacune d'elles à 10^{-8} près.

2°question Soit l'équation réduite $x^3+3px+q=0$; $p<0$; $q<0$; et $4q^3+q^2\le 0$

Nous savons qu'elle admet trois solutions réelles distinctes (II).

a)Démontrer que les solutions appartiennent à l'intervalle $I=[-2\sqrt{-p}, 2\sqrt{-p}]$. Resoudre (E) si $\Delta = 0$.

b) On suppose alors $\Delta < 0$, montrer qu'il existe deux réels θ et ψ tels que : $\forall x \in I,\ x = 2\sqrt{-p}\cos\theta$ et $\cos\psi = \dfrac{q}{2p\sqrt{-p}}$; $\psi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

c) Exprimer cos3θ en fonction de cosθ et en déduire en fonction de ψ les racines de l'équation (E).

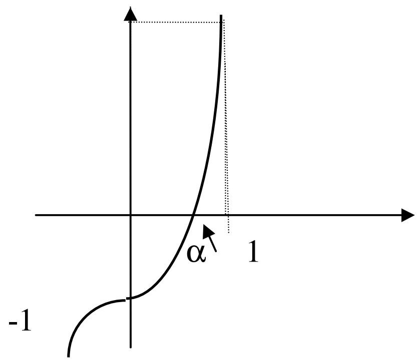
3°question. Application : résoudre dans R $x^3-3x-1=0$; on donnera les valeurs exactes des solutions.

Remarque Cette méthode a l'intérêt de conduire à des valeurs exactes des solutions lorsque $\cos\psi$ donne un angle remarquable ,$\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}$. Sinon , la fonction Arccos, sur la calculatrice, donne des valeurs approchées de ψ et par suite des trois solutions.

ANNEXE 1 :Eléments de solutions des problèmes posés au I et II du Chapitre III

§1 **<u>Stade graphique</u>** $f: x \to x^3 + 2x - 1$, f est une somme de deux fonctions strictement croissantes sur R ; $x \to x^3$ et $x \to 2x - 1$, donc f est strictement croissante sur R.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f(x)	$-\infty$	-1	2	$+\infty$



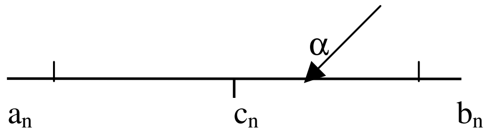
On peut conclure que l'équation (1) admet une solution $\alpha \in]0,1[$ et, puisque f est strictement croissante, cette solution est unique. En effet, supposons x et x' éléments de [a,b] tels que $x < \alpha < x'$, alors $f(x) < 0 < f(x')$. L'aspect de la courbe représentative rend ce résultat évident.
Puisque ce résultat a un caractère évident, dans un premier temps, développons une méthode de calcul de valeurs approchées du réel α.

<u>NB</u> Dans un cours à l'Ecole Polytechnique (1821) Cauchy considère que cette interprétation graphique à valeur de démonstration, et c'est seulement dans la note III de son ouvrage « Analyse Algébrique » sur la résolution numérique des équations, qu'il précise une "démonstration", en fait: une approximation de la solution à une précision arbitraire, en utilisant une variante de la dichotomie.

§2 Stade calculatoire 1° question

n	a_n	b_n
0	0	1
1	0	0.5
2	0.25	0.5
3	0.375	0.5
4	0.4375	0.5
5	0.4375	0.46875
6	0.453125	0.46875
7	0.453125	0.4609375
8	0.453125	0.45703125
9	0.453125	0.455078125
10	0.453225	0.4541015625

Puisque pour tout entier $n \leq 10$ $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$ et $a_n \leq \alpha \leq b_n$ donc les nombres décimaux a_n et b_n sont respectivement des valeurs approchées par défaut et par excès de α dont l'existence est constatée sur le graphique au §1.



2° question. Les résultats du stade calculatoire permettent de conjecturer que: la suite (a_n) est croissante et majorée par $b_0 = b$, la suite (b_n) est décroissante et minorée par $a_0 = a$; enfin que toutes les deux convergent vers le même nombre α, solution de (1).

3° question. Supposons que α, solution évidente sur le graphe, soit un rationnel, alors $\alpha = \dfrac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers premiers entre eux.

$f(\alpha) = 0$ donne $(\dfrac{p}{q})^3 + 2(\dfrac{p}{q}) - 1 = 0$; soit $p^3 + 2pq^2 = q^3$

Cette égalité montre que p divisant le premier nombre, il divise q^3 donc p divise q, ces entiers étant premiers entre eux, nécessairement p = 1. Dans ce cas: $1 + 2q^2 = q^3$;$q^2(q-2) = 1$, ce qui est impossible. Par conséquent, α n'est pas un rationnel; par suite on ne peut avoir un entier n tel que : $\alpha = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, ce dernier $\dfrac{a_n + b_n}{2}$ étant rationnel, ici décimal, puisque $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ le sont, ainsi que tous les a_n et b_n. La solution α, si elle existe, est un nécessairement un nombre non rationnel, ce qui implique que le processus de construction des nombres (a_n) et (b_n) n'est pas fini. Donc la calculatrice, si puissante fut-elle, ne permettra pas d'obtenir la valeur de la solution puisque celle-ci est irrationnelle. Ainsi le nombre α, dont l'existence et l'unicité sont assurés, son écriture décimale étant illimitée et non périodique, celle -ci ne nous est pas accessible par le calcul uniquement. Il faut donc pour définir α, autrement que par des V. A. avec une précision limitée, lui donner un statut, en tant que nombre, indépendant du problème étudié ici. C'est la démonstration du théorème de Bolzano qui le permettra.

ANNEXE 2: Eléments de solutions de la troisième partie du chapitre IV

I 1°question. a) P(X) = aQ(x); si $h = -\dfrac{b}{3a}$ alors

$$Q(x) = x^3 + \frac{1}{a}(3ah^2 + 2bh + c)x + \frac{1}{a}(ah^3 + bh^2 + ch + d)$$

Si α est racine de P(X) alors $P(\alpha) = 0$ donc $Q(\alpha - h) = 0$ et $\alpha - h$ est racine de Q(x); et réciproquement. Ainsi P et Q ont même nombre de racines et si c est racine de Q(x) alors c+h est racine de P(X).

En conclusion : résoudre P(X) = 0 équivaut à résoudre Q(x)=0.

b) h=2 , X =x+2 , $P(X) = (x+2)^3 - 6(x+2)^2 + 15(x+2) - 15$

Donc $Q(x) = x^3 + 3x - 1$; p=1, q =-1.

I 2°question. a)

$$x^3 + 3px + q = 0 \ ; \ \text{si } p = 0 \quad x^3 = -q$$

– $q < 0$ alors $\alpha = \sqrt[3]{-q}$ solution unique

– $q > 0$ alors $\alpha = \sqrt[3]{q}$ solution unique

– $q = 0$ $x(x^2 + 3p) = 0$; si $p > 0$; 0 est solution unique

si $p < 0$ $\left\{-\sqrt{-3p}, 0, \sqrt{-3p}\right\}$

b) Si $\alpha^3 + 3p\alpha + q = 0$ alors $-\alpha^3 - 3p\alpha - q = 0$ donc $(-\alpha)^3 + 3p(-\alpha) - q = 0$
Ainsi $-\alpha$ est solution de $x^3 + 3px - q = 0$. La réciproque est vraie:
$-\alpha$ est solution de $x^3 + 3px - q = 0$.
Conclusion : résoudre $x^3 + 3px + q = 0$ equivaut à resoudre $x^3 + 3px - q = 0$; les solutions sont opposées. Désormais , nous poserons q < 0.

II 1°question. a) $f'(x) = 3x^2 + 3p$, $p > 0$, $q < 0$ est positive sur R. La fonction f est $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ continue et strictement croissante sur R . Le réel 0 admet donc un antécédent unique par f

b) $f'(x) = 3x^2 + 3$, f(0)f(1)=-3 donc $\alpha \in [0,1]$

II 2°question a) $f'(x) = 3x^3 + 3p = 3(x - \sqrt{-p})(x + \sqrt{-p})$

x	$-\infty$		$-\sqrt{-p}$		$\sqrt{-p}$		+
f'(x)		+	0	−	0	+	
f		↗	M	↘	m	↗	

b)

$$M = f(-\sqrt{-p}) = -2p\sqrt{-p} + q$$

$$M = \frac{4p^3 + q^2}{2p\sqrt{-p} + q}$$

le dénominateur de M est < 0 , M a donc le signe de -Δ

c) Si $\Delta > 0$ M <0 , l'image de l'intervalle $\left]-\infty, \sqrt{-p}\right[$ par f est $\left]-\infty, M\right] \subset R^{*-}$

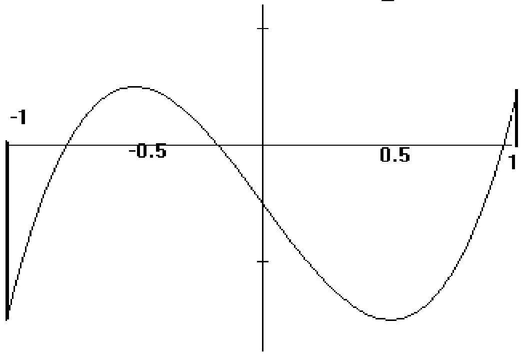
Donc f ne s'annule pas sur $\left]-\infty, \sqrt{-p}\right]$. par contre la restriction de f à $\left[\sqrt{-p}, +\infty\right[$ est une bijection de $\left[\sqrt{-p}, +\infty\right[$ sur $\left[m, +\infty\right[$; 0 appartient à l'intervalle image ,il admet un antécédent unique α par f.

Si Δ=0 M=0 , $-\sqrt{-p}$ est solution double; l'autre solution appartient à $\left]\sqrt{-p},+\infty\right[$

Si $\Delta < 0$ M>0 ,le même raisonnement donne une solution sur chacun des intervalles

$\left]-\infty,-\sqrt{-p}\right[$, $\left]-\sqrt{-p},\sqrt{-p}\right[$, $\left]\sqrt{-p},+\infty\right[$; en effet m<0 car: $m = 2p\sqrt{-p}+q = f(\sqrt{-p})$.

III 1°question $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$; $f'(x) = 12(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$



en utilisant les th5 et corollaire,on démontre aisément que l'équation admet trois solutions distinctes ,a ,b ,et c appartenant respectivement aux intervalles :

$$\left[-1,-\frac{1}{2}\right], \left[-\frac{1}{2},0\right] \text{ et } \left[\frac{1}{2},0\right]$$

b) Puisque les trois solutions de (1) appartiennent à [-1,+1], l'équation (1) équivaut à:

$$\begin{cases} 4\cos^3\theta - 3\cos\theta - \frac{1}{2} = 0 \\ x = \cos\theta \end{cases}$$

Donc, $\begin{cases} 4\cos^3\theta - 3\cos\theta - \frac{1}{2} = 0 \\ x = \cos\theta \end{cases}$

$$\cos 3\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \quad (2)$$

(2) equivaut sur R à $3\theta = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ou $3\theta = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$

$$\theta = \frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \quad \text{ou} \quad \theta = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}$$

La fonction cosinus est paire, on retiendra donc les solutions:

$a = \cos\frac{\pi}{9}$, $b = \cos\frac{5\pi}{9}$, $c = \cos\frac{7\pi}{9}$

La calculatrice donne des valeurs approchées des cosinus à 10^{-10}:

a ≈ 0,9396926208 b ≈ -0,1736481777 c ≈ -0,7660444431

III 2°question. a) Le tableau de variation (II 2°question) nous indique pour les trois solutions a, b, et c :

$$a < -\sqrt{-p} < b < \sqrt{-p} < c$$

or $f(-2\sqrt{-p}) < 0$ et $f(2\sqrt{-p}) > 0$ Ainsi $a \in \left[-2\sqrt{-p},-\sqrt{-p}\right]$, $b \in \left[-\sqrt{-p},\sqrt{-p}\right]$

et $c \in \left[\sqrt{-p},2\sqrt{-p}\right]$

Si $\Delta = 0$, $M = 0$, $a = b = -\sqrt{-p}$

alors $x^3 + 3px + q = (x - \frac{q}{p})(x + \sqrt{-p})^2$ $\quad S = \left\{-\sqrt{-p}, \frac{q}{p}\right\}$

b) Posons $x = 2\sqrt{-p}\cos\theta$ car $-1 \leq \frac{x}{2\sqrt{-p}} \leq 1$

L'équation (1) équivaut à:

$-2p\sqrt{-p}\left[4\cos^3\theta - 3\cos\theta\right] + q = 0 \quad \cos 3\theta = \frac{q}{2p\sqrt{-p}}$

Le reel $\frac{q}{2p\sqrt{-p}}$ a pour carré $-\frac{q^2}{4p^3}$; or ici $4p^3 + q^2 < 0$

donc $0 < -\frac{q^2}{4p^3} < 1$; il existe ψ unique $\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos\psi = -\frac{q^2}{4p^3}$

c)

$\cos 3\theta = \cos\psi$ donne $\theta = \frac{\psi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$ et les opposes,

$a = 2\sqrt{-p}\cos\frac{\psi}{3}$, $b = 2\sqrt{-p}\cos\left(\frac{\psi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$, $c = 2\sqrt{-p}\cos\left(\frac{\psi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$