CHAPITRE V : COMPLEMENTS DE CALCUL DIFFERENTIEL

"LA DICHOTOMIE : OUTIL DE CALCUL ET DE DEMONSTRATION"

PRESENTATION

Formulation du problème sur exemples.

1°Méthode (ACTIVITE ET COURS)

I Principe de Lagrange

II Théorème et Inégalité des accroissements finis

III Approximation de f par un polynôme de degré deux

2° Méthode : pour mémoire

I Théorème de Rolle

II Théorème des accroissements finis et Principe de Lagrange

ANNEXES

Annexe 3 . Eléments de solution de " Formulation du problème sur exemples.

Annexe 4. Eléments de solution du I A, 1° partie

PRESENTATION

L'approche d'une solution par dichotomie montrant sa « lenteur » relative, il importe de rechercher des suites convergeant « plus rapidement » vers la solution de l'équation. Je pense à la méthode du point fixe ou celle des tangentes qui exigent des connaissances complémentaires sur le calcul différentiel. C'est l'occasion d'une nouvelle séquence déductive où je développe deux méthodes possibles conduisant au même résultat. On peut, en premier lieu, admettre ou démontrer le théorème de Rolle, puis démontrer l'inégalité des accroissements finis. Enfin, démontrer le « principe de Lagrange » admis au Lycée dès la classe de première. C'est l'ordre le plus souvent usité. Ici, **désirant illuster la puissance de la dichotomie comme méthode de démonstration, notamment pour les problèmes de convergence**, je développe une autre piste; d'abord la démonstration du «Principe de Lagrange »qui gouverne le sens de variations des fonctions et d'où l'on déduit l'inégalité des accroissements finis. Rappelons que ce dernier résultat est un outil remarquable pour majorer « Majorer, minorer, encadrer... ».

L'objectif est ici la démonstration au débutant de quelques théorèmes d'analyse élémentaire, il n'est pas question d'un cours exhaustif d'analyse. C'est pourquoi je ne reviendrai pas sur les premières définitions du calcul différentiel dont le traitement est désormais classique en France au Lycée dès la classe de première. La qualité de ce travail se révèle notamment lors de la définition de la dérivabilité en un point sous les trois aspects habituels. L'aspect qualitatif avec la limite du taux d'accroissement de f entre x et x_0. Puis l'aspect quantitatif avec le développement limité à l'ordre un de f en x_0, et enfin l'aspect iconographique avec l'interprétation géométrique comme coefficient directeur de la tangente. Je suppose donc connu dans ce chapitre le calcul des dérivées des fonctions polynômes et rationnelles, logarithmes et exponentielles et circulaires.

Résumons brièvement le contenu.

Dans une activité initiale, l'approche d'une solution d'une équation du troisième degré, par dichotomie, conduit à la recherche de suites convergeant plus rapidement. C'est le cas de la méthode du point fixe. L'apprenant constate dans un second exemple que celle -ci ne fonctionne pas toujours. Ceci justifiera le développement de la méthode de Newton-Raphson. Mais pour justifier ces méthodes, des savoirs complémentaires sur le calcul différentiel sont nécessaires.

- dérivées et sens de variation ; bien qu'admis au Lycée, nous démontrons ici le lien. Dans le contexte de l'acquisition progressive d'un savoir je pense que cette pratique est courante et ne présente pas ici d'ambiguïté[1].
- inégalité des accroissements finis.

La première méthode développée constitue l'originalité de ce texte. Elle utilise la dichotomie pour démontrer le Principe de Lagrange, avec pour prérequis les suites adjacentes comme aux chapitres précédents. Ce développement renforce donc l'importance théorique de la dichotomie dans les problèmes de convergences en Analyse, et conduit rapidement à l'inégalité des accroissements finis et son prolongement à la dérivée seconde. L'unité des quatre premiers chapitres est ainsi réalisée.

La seconde méthode, plus traditionnelle, rappelée brièvement, ne figure ici que pour mémoire. Le théorème de Rolle a pour conséquence le théorème des accroissements finis et l'inégalité du même nom. On déduit enfin de ceci le Principe de Lagrange.

Le développement qui suit utilise, comme précédemment un rythme ternaire : une Activité (stade iconographique et manipulatoire) qui peut être réalisé par l'apprenant et enfin le Cours (appelé ici : stade formel).

FORMULATION DU PROBLEME A PARTIR D'EXEMPLES (ACTIVITE PREPARATOIRE)

Exemple 1

Soit l'équation: $x \in [2,3] \quad x^3 - 6x - 6 = 0 \quad (1)$

1°question Démontrer que l'équation (1) admet une solution et une seule $\alpha \in [2,3]$.

Déterminer, par dichotomie, un encadrement de α de longueur 10^{-6}.

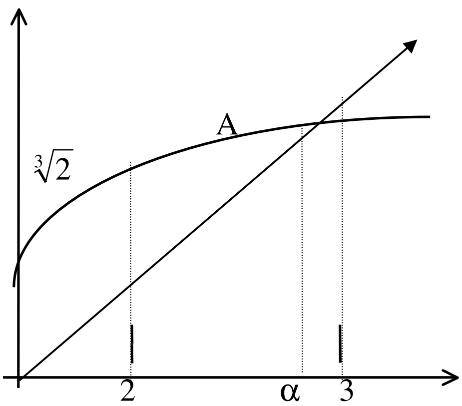
Combien de dichotomies sont-elles nécessaires ? (Voir programme chapitre 1, §II)

2°question a) Démontrer que l'équation (1) équivaut sur [2,3] à l'équation:

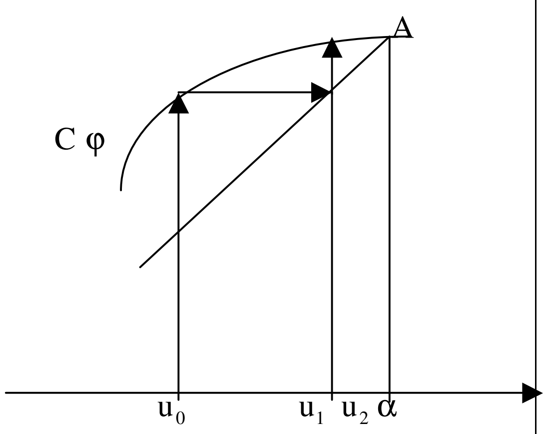
$$x \in [2,3] \quad \varphi(x) = x \quad (2) \quad \text{où} \quad \varphi(x) = \sqrt[3]{6x+6}\,; \quad x \in [-1,+\infty[$$

Montrer que le réel α est l'unique solution de l'équation (2). Le réel α vérifiant $\varphi(\alpha) = \alpha$ est appelé un point fixe de φ sur l'intervalle I = [2,3].

b) Démontrer que l'équation (2) est l'équation aux abscisses des points d'intersection de C_φ et de la droite $\Delta(y = x)$. $A(\alpha, \alpha)$ est l'unique point d'intersection.



(figure1)



(figure 2)

3°question Itération par escalier montant (figure 2). Soit la suite numérique définie par: $u_0 = 2 \quad \forall n \in N \quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$

[1] En Deug, l'étudiant admet le théorème de d'Alembert, il sera démontré en Licence.

a) Démontrer que $\varphi(I) \subset I$, ainsi la suite (u_n) est définie pour tout entier n. Montrer que $\forall n \in N \quad u_n \in I$.

b) Représenter géométriquement u_0, u_1, u_2, et u_3. Voir indication ci-contre. Que peut-on conjecturer pour la suite (u_n) ?

c) Démontrer que la suite (u_n) converge vers α l'unique point fixe de φ sur [2,3]. On utilisera la continuité de φ sur [2,3] et en particulier en α.

4°question A partir de l'organigramme proposé ou d'un autre (de votre initiative), calculer $u_1, u_2, \ldots, u_{10}$. Que peut-on conclure ?
(Voir organigramme en annexe 3).

Exemple 2

Soit l'équation $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$; $x^3 + 3x - 1 = 0$ (1)

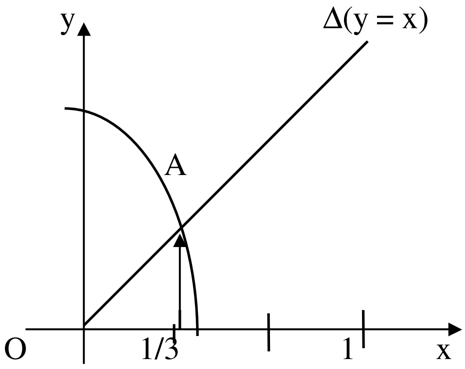
1°question Démontrer que (1) admet une solution unique $\alpha \in [0,1/3]$. Déterminer par dichotomie un encadrement de α d'amplitude 10^{-6}. Combien de dichotomies sont-elles nécessaires ?

2°question a) Démontrer que l'équation (1) équivaut sur I = [0,1/3] à :
$\varphi(x) = x$ (2) ,où φ est definie sur $]-\infty, 1/3]$ par $\varphi(x) = \sqrt[3]{1-3x}$.
Le réel α est donc l'unique solution de (2), donc l'unique point fixe de φ sur [0,1/3].

b) Démontrer que (2) est l'équation aux abscisses des points communs à C_φ et Δ (y = x).

3°question Comme pour l'exemple précédent, on pose $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.
Calculer $u_1, u_2, \ldots, u_{10}$. Que peut-on conclure ? Pour la fonction φ, rechercher les propriétés qui diffèrent entre les exemples 1 et 2.

Voir éléments de solutions en annexe 3, à la fin du chapitre.



Ainsi, il est toujours possible de ramener la résolution et l'approche d'une solution de l'équation du troisième degré à une équation à point fixe $\varphi(x) = x$. L'approche de α se fait alors par itération du type: $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

- Lorsque la méthode fonctionne, la convergence semble plus rapide que par la dichotomie. Pourquoi ? On ne peut répondre dès maintenant.
- Parfois, le point fixe α ne peut être approché par itération(exemple 2). Pouvez vous donnez une raison, liée à la courbe représentative de f?

- Comment faire dans ce cas pour accélérer la convergence vers α. Nous répondrons, en partie, à ces questions au chapitre suivant. Mais pour cela il faut élargir nos connaissances sur le calcul différentiel dans le présent chapitre.

1° METHODE

I LE PRINCIPE DE LAGRANGE

Les prérequis: Suites monotones et bornées, suites adjacentes et les Théorèmes admis sur les limites de suites et de fonctions, conformément au programme des Lycées. Pour des raisons heuristiques non allons réaliser la démonstration par étapes ; activités liminaires puis cours.

ACTIVITE

-A- Ligne droite et lignes brisées

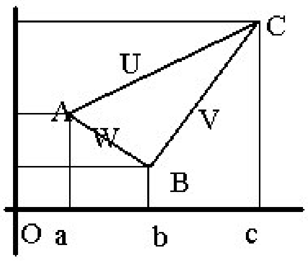


fig1

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $R(O,i,j)$. Soit trois points A, B et C distincts deux à deux, dont les coordonnées sont respectivement : (a,a’), (b,b’) et (c,c’).
On désigne par W,U, et V les coefficients directeurs respectifs des droites (AB), (AC) (CB). Dans ce repére nous dirons, par commodité" pente" d'une droite pour coefficient directeur.

a) Démontrer que U,V et W vérifient la relation suivante :

$$\underline{(b-a)W = (c-a)U + (b-c)V}$$

En d’autres termes, nous dirons que, sur la droite réelle, W est le barycentre du système[2] :

$$\{(U,(c-a));(V,(b-c))\}$$

b) Que peut-on dire de W si $c=\dfrac{a+b}{2}$?

a) A quelle condition portant sur a, b et c, le réel W est-il compris entre U et V ? Dans la suite, on énoncera ce résultat sous la forme suivante:

Lemme 1 Si $a < c < b$, alors la pente de (AB) est comprise entre celle de (AC) et celle de (CB).

-B- Pentes des sécantes à Cf

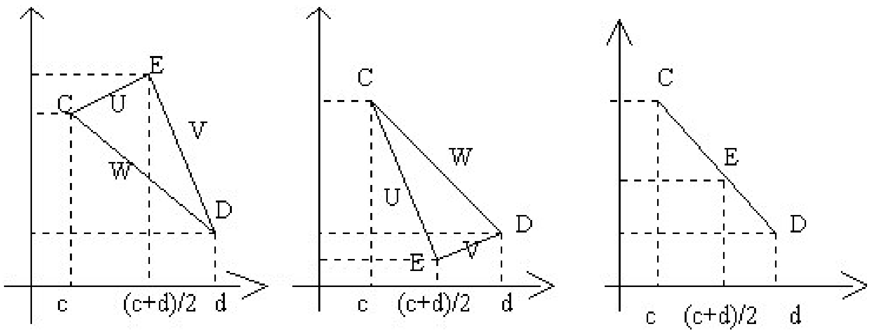
Soit une fonction f définie et dérivable sur le segment [a,b], sa dérivée étant positive; c'est à dire: $\forall x \in [a,b] \;\; f'(x) \geq 0$. Donc la pente de la tangente en tout point du graphe est toujours positive; il est raisonnable de conjecturer à partir du graphe Cf que f est croissante sur [a,b]. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe deux points C et D de Cf, d'abscisses c et d, c < d, tels que la sécante (CD) ait une pente négative. Voyons les conséquences de ceci.
Ainsi, il existe c et d tels que: $a \leq c < d \leq b$ et $f(d) < f(c)$

[2] Je remercie au passage Sylviane Gasquet (Auteur de " Fenêtres sur courbes") de m'avoir rappelé cette propriété qui simplifie la rédaction de ce lemme.

ECLAIRAGE GEOMETRIQUE

On désigne par C , D et E les points de Cf d'abscisses respectives c, d et (c+d)/2.(Voir figures 2, 3 et 4 ci-dessous) ;On reprend les notations du A pour U ,V ,et W .

fig 2 fig 3 fig 4



Si la pente de la corde (CD) est négative, les figures ci-dessus montrent que nécessairement l'une des pentes des cordes (CE) ou (ED) est également négative. Le ressort de la démonstration devient apparent. En effet, on construit une suite de cordes de Cf telles que: les pentes des cordes sont négatives. Il est donc légitime de se poser la question; ces cordes ont-elles pour position limite une tangente à Cf, de pente négative, en un point dont l'abscisse est défini par deux suites adjacentes ? D'ou la contradiction.

-C- FORMALISATION

ENONCE (ACTIVITE)

1°question En utilisant le A démontrer la propriété P_1 suivante :
« Si f est définie sur [a,b] et s'il existe deux réels c et d de [a,b] tels que
$c < d$ et $f(d) < f(c)$ alors il existe deux réels c_1 et d_1 appartenant à $[a, b]$ tels que :
$c \le c_1 < d_1 \le d$; $d_1 - c_1 = \dfrac{d-c}{2}$; $\dfrac{f(d_1)-f(c_1)}{d_1 - c_1} \le \dfrac{f(d)-f(c)}{d-c} < 0$; l'un des réels c_1 ou bien d_1 étant égal à $\dfrac{c+d}{2}$. »

2° question Démontrer[3], par récurrence sur l'entier n, que la propriété P_n suivante, est vraie pour tout entier n .On posera $c = c_0$ et $d = d_0$.

P_n « **Si** f est définie sur [a,b] et s'il existe c et d de [a,b] , tels que : c < d et f(d) <f(d) **ALORS** IL EXISTE deux suites (c_n) et (d_n) de réels de [c,d] tes que:$c_0 \le c_1 \le .... \le c_n < d_n \le .... \le d_1 \le d_0$; $d_n - c_n = \dfrac{d-c}{2^n}$

$$\text{et } \frac{f(d_n)-f(c_n)}{d_n - c_n} \le \frac{f(d)-f(c)}{d-c} < 0 \text{ . »}$$

3°question En déduire que les réels c_n et d_n définissent deux suites adjacentes dont la limite commune sera appeléeα , $\alpha \in [c, d]$.

[3] Selon le degré de rigueur envisagé, ou pour écouter la rédaction, on peut ne pas développer formellement le raisonnement par récurrence mais l'esquisser seulement. En effet la propriété noté ici P_n st facile à accepter après les éclairages graphiques donnés.

COURS

-D- POSITION LIMITE DES SECANTES (C_nD_n)

La propriété du C, 3° nous permet d'affirmer qu'il existe un réel α de l'intervalle [c,d] ; limite commune de deux suites adjacentes (c_n) et (d_n), construites par dichotomie au C, 2°. On appelle F le point de Cf d'abscisse α , et pour tout entier naturel n, on désigne par W_n, U_n, et V_n les coefficients directeurs des droites (C_nD_n), (C_nF) et (FD_n).

Eclairage géométrique

Voir figures (5) et (6) ci-dessous

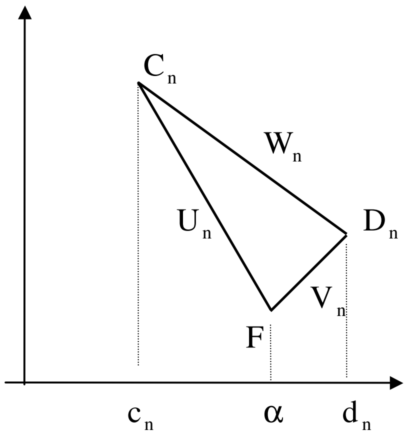


fig5

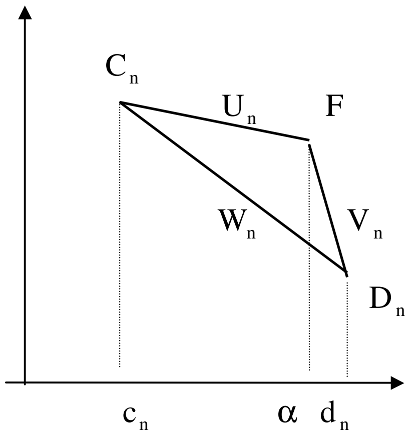


fig6

Lorsque n tend vers l'infini, c_n tend vers α et le point C_n vers le point F sur la courbe C_f ; de même (d_n) converge vers α et D_n tend vers le point F sur Cf. On peut donc conjecturer que les cordes (FC_n) et (FD_n) ont pour position limite la tangente en $(F(\alpha, f(\alpha))$ de coefficient directeur $f'(\alpha)$. Soit (t'Ft) cette tangente, par hypothèse $f'(\alpha) \geq 0$ la pente de cette droite est donc positive ou nulle. Or d'après le lemme 1 (au A) (voir fig5 et 6) $\frac{f(d)-f(c)}{d-c}$ est compris entre U_n et V_n . Que devient W_n la pente de la droite (C_nD_n) quand n tend vers l'infini ?

démonstration : le lemme1 dit: " la pente de (C_nD_n) est comprise entre celle de (C_nF) et celle de (FD_n)." En d'autres termes, on peut énoncer:
W_n est le barycentre du système $\{(U_n, \alpha - c_n); (V_n, d_n - \alpha)\}$; les coefficients $\alpha - c_n$ et $d_n - \alpha$ étant positifs, $\boxed{\forall n \in N \quad W_n \in [U_n, V_n] \text{ ou } [V_n, U_n] \quad (1)}$

Soit l'application "taux d'accroissement entre α et x" définie par

$x \in [a,b] - \{\alpha\} \quad \varphi(x) = \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$. Alors $\varphi(c_n) = U_n$ et $\varphi(d_n) = V_n$. De plus $\lim\limits_{n\to 0} c_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to 0} d_n = \alpha$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} \varphi(x) = f'(\alpha)$.

Par composition des limites de suites et de fonctions, il vient donc : $\boxed{\lim(\varphi(c_n)) = \lim(U_n) = f'(\alpha)}$ (2) et $\boxed{\lim(\varphi(c_n)) = \lim(V_n) = f'(\alpha)}$ (3). D'après les relations (1) ,$|W_n - U_n| \leq |U_n - V_n|$; puisque $\lim(U_n - V_n) = 0$ a fortiori ; $\lim\limits_{n\to\infty}(W_n - U_n) = 0$. Puisque d'après (2) (U_n) converge vers $f'(\alpha)$, la suite (W_n) converge aussi f'(α)et $\lim\limits_{n\to\infty}(W_n) = f'(\alpha)$ (4) d'où le résultat:

Lemme 2 .**Si** f est dérivable en un point α de son domaine de définition et si les suites adjacentes (c_n) et (d_n) converge vers α **Alors** la suite

$$\left(\frac{f(d_n)-f(c_n)}{d_n-c_n}\right) \text{converge vers } f'(\alpha).$$

Par ailleurs, rappelons la propriété démontrée au B, elle entraîne :

$$\forall n \in N \quad W_n \leq \frac{f(d)-f(c)}{d-c} < 0 \quad \Rightarrow \quad \lim(W_n) \leq \frac{f(d)-f(c)}{d-c} < 0$$

$$\text{Ainsi } f'(\alpha) \leq \frac{f(d)-f(c)}{d-c} < 0, \text{ soit } f'(\alpha) < 0$$

Ce résultat contredit l'hypothèse , donc nécessairement si $c < d$ alors $f(c) \leq f(d)$. Ainsi f est croissante sur [a,b] . Si pour tout x de [a,b] , $f'(x) \leq 0$, en appliquant le résultat précédent à -f , on obtient : si $f'(x) \leq 0$ sur [a,b] alors f est décroissante sur cet intervalle; concluons:

Théorème 1. (appelé souvent "Principe de Lagrange") Si f est dérivable sur [a,b] et $f'(x) \geq 0$ sur [a,b](resp. $f'(x) \leq 0$ sur [a,b])alors f est croissante (resp décroissante) sur cet intervalle .

Corollaire 1 Si f est dérivable sur [a,b] et sa dérivée nulle sur [a,b] alors f est constante sur cet intervalle.

Preuve du corollaire: $\forall x \in [a,b]$ $f'(x) \geq 0$ et $f'(x) \leq 0$.Donc le théorème implique: f est croissante et décroissante sur [a,b]. Soir un réel fixé $x_0 \in$ [a,b].

Pour tout $x \in$ [a,b]: si $x <_0$ alors $f(x) \leq f(x_0)$ et $f(x) \geq f(x_0)$ donc $f(x) = f(x_0)$.

De même si $x > x_0$ alors $f(x) = f(x_0)$.

Remarque 1: Si f'(x)≥0 sur un intervalle I qui n'est pas un segment (fermé borné) les démonstrations ci-dessus restent vraies. On énoncera le théorème et son corollaire en remplaçant au besoin [a,b] par:]a,b[, [a,b[,]a,b] où a et b sont des réels , ou $+\infty$, ou $-\infty$.

Remarque 2: Si f '(x)≥ 0 sur un intervalle I de R et ne s'annule sur aucun sous-intervalle de I, on peut en déduire que f est strictement croissante sur I.

En effet, supposons qu'il existe c et d de l'intervalle I tels que: f'(x)≥ 0 sur I et f(c) = f(d)

Alors le théorème implique: f est croissante (au sens large) sur [c,d]. Pour tout x de [c,d], on a donc: $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$; donc f(x) = f(d) et f est constante sur l'intervalle [c,d], ce qui est contraire à l'hypothèse.

Corollaire 2: Il suffit d'énoncer pour les besoins dans un premier temps : Si f est dérivable sur l'intervalle I de R et f '(x)≥ 0 sur I, f ' s'annulant seulement en un nombre dénombrable de points, alors f est strictement croissante sur l'intervalle I.

II INEGALITE DES ACCROISSEMENTS FINIS COMME APPLICATION DU PRINCIPE DE LAGRANGE :

Lemme 3: Si f et g sont dérivables sur [a,b] et a < b, tels que: pour tout x de [a,b]

$f'(x) \leq g'(x)$ alors $f(x)-f(a) \leq g(x)-g(a)$.

Dans ce paragraphe, nous allons étudier comment certaines propriétés de la dérivée de f entraîne des propriétés pour f.

Preuve du Lemme 3 :sur [a, b] $0 \leq g'(x) - f'(x)$, soit $0 \leq (g' - f')(x)$

Ainsi, $\forall x \in [a,b] \quad 0 \le (g-f)'(x)$ donc $g-f$ est croissante sur [a,b] par le principe de Lagrange.

$$\forall x \in [a,b] \quad a \le x \quad \Rightarrow (g-f)(a) \le (g-f)(x) \text{ et } g(a)-f(a) \le g(x)-f(x)$$

$$\text{Enfin:} f(x)-f(a) \le g(x)-g(a).$$

Théorème2. appelé " Inégalité des Accroissements Finis."
Si f est dérivable sur [a,b] (a < b) et s'il existe m et M réels constants tels que $\forall x \in [a,b] \quad m \le f'(x) \le M$, ALORS $\forall x \in [a,b], \quad m(x-a) \le f(x)-f(a) \le M(x-a)$

Preuve: La constante M est, sur [a,b], la dérivée de $x \longrightarrow Mx$; la constante m est, sur [a,b], la dérivée de $x \longrightarrow mx$. Appliquons le lemme 3 ci-dessus à f et à $x \longrightarrow Mx$; $f'(x) \le M$ entraîne

$$f(x)-f(a) \le M(x-a).$$

De même, appliquons le lemme à f et à $x \longrightarrow mx$; $m \le f'(x)$ entraîne

$$m(x-a) \le f(x)-f(a).$$

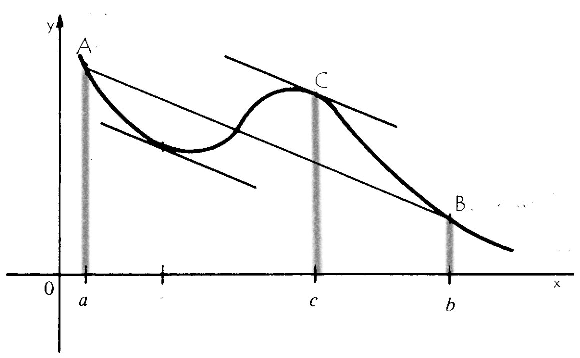
D'où le résultat annoncé.

Corollaire 1.**Si** f est dérivable sur l'intervalle I et s'il existe un réel positif constant M tel que: pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \le M$ **ALORS** pour tous réels a et b de l'intervalle I, on a $|f(b)-f(a)| \le M|b-a|$

Le lemme ci-dessus s'applique aux dérivées -M', f '(x) et M des fonction -Mx, f(x) et Mx sur tout intervalle [a,x] de I, a < x , il vient : $\forall x \in I \quad -M \le f'(x) \le M$ donc $-M(x-a) \le f(x)-f(a) \le M(x-a)$
Pour x = b, on obtient le corollaire 1.
Le théorème 2 ci-dessus peut aussi s'écrire : $\forall x \in [a,b] \quad m \le f'(x) \le M \Rightarrow \forall x \in [a,b], \quad f(a)+m(x-a) \le f(x) \le f(a)+M(x-a)$ (1)
Les hypothèses étant celles du théorèmes 2, on suppose de plus f ' continue sur [a,b] c'est à dire f de classe C^1**.** La fonction f ' continue sur [a ;b], l'image du segment par f ' est un segment : notons les bornes du segment image par f ' m et M .
f '([a,b]) =[m ; M]. La relation (1) reste vraie pour les bornes atteintes m et M par f '(x).
Cette relation (1) montre qu'il existe un réel k de[m ; M] tel que $f(x) = f(a)+k(x-a)$ (2).
Par ailleurs ce réel k est une valeur prise par f ' sur [a ; b] (Théorème des valeurs intermédiaires pour la fonction continue f '). Donc il existe au moins un réel c de [a ; b] tel que f '(c) = k ; la relation (2) s'écrit alors $\forall x \in [a;b] \; f(x) = f(a)+f'(c)(x-a)$. Il vient alors si x = b : f(b)-f(a) = f '(c)(b - a) on obtient le théorème des accroissements finis (corollaire 2 ci-dessous)

Théorème 3. Théorème des accroissements finis. Si f est de classe C^1sur [a,b], (a < b) il existe au moins un réel c de [a,b] tel que l'on ait : f(b)= f(a) +f '(c)(b - a).

En d'autres termes : $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. L'interprétation géométrique du théorème des accroissements finis s'en déduit : il existe au moins un point C(c, f(c)) de la courbe C_f où la tangente à la courbe est parallèle à la droite (AB) , avec A(a, f (a)) et B(b, f (b)). Fig ci-dessus.



Dans le même ordre d'idées, les propriétés de la dérivée seconde, lorsqu'elle celle-ci existe, entraînent-t-elles des propriétés pour f ?

Théorème 4. Si f est de classe C^2 sur [a ,b] (a < b) (c'est à dire f est deux fois dérivables et ses dérivées sont continues sur [a,b]) **ALORS** il existe au moins un réel c de [a,b] tel que :

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{1}{2}f''(c).(b - a)^2$$

Pour cela démontrons la propriété suivante :

Lemme 4. **Si** f est de classe C^2 sur [a ,b] (a < b) **ALORS** il existe deux réels m et M tels que $m \le f''(x) \le M$ sur [a,b] pour tout x de cet intervalle

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{m}{2}(x-a)^2 \le f(x) \le f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{M}{2}(x-a)^2:$$

Puisque f '' est continue sur [a,b], elle est bornée. Supposons que pour tout x de [a,b] $f''(x) \le M$ où M est un réel constant. En remarquant que f ''(x) est la dérivée de f '(x) et M la dérivée de Mx

Appliquons le théorème 2 ci- dessus : $f'(x) - f'(a) \le Mx - Ma = M(x-a)$

De même le premier membre est la dérivée de f(x) - f '(a)x et le second membre est la dérivée de $\frac{1}{2}M(x-a)^2$; le même théorème 2 entraîne pour tout x de [a,b] :

$f(x) - f'(a)x \le \frac{1}{2}M(x-a)^2$ donc $f(x) \le f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}M(x-a)^2$.

En raisonnant de la même façon avec un minorant m de f ''(x) sur [a, b], on obtient la double inégalité appelée ici lemme 4.

On peut choisir pour m et M les bornes du segment image de [a,b] par la fonction continue f ''. Ainsi f ''([a,b]) = [m , M]

Posons g(x) = f(a) +f '(a)(x - a) ; $\forall x \in [a\,,b]\ g(x) + m\frac{1}{2}(x-a)^2 \le f(x) \le g(x) + M\frac{1}{2}(x-a)^2$.

Il existe donc un réel k de [m , M] tel que

$$f(x) = g(x) + k\frac{1}{2}(x-a)^2 = f(a) + f'(a)(x-a) + k\frac{1}{2}(x-a)^2$$

Puisque k appartient à l'intervalle image [m , M], c'est une valeur prise par f ''. donc il existe c appartenant à [a, b] tel que f '' (c) = k. Alors $f(x) == f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(c)(x-a)^2$

Si l'on pose x = b le théorème 4 est démontré.

Corollaire 2. Si f est de classe C^2 sur un intervalle fermé I de centre u et telle que f '(u) =0 et f ''(u) > 0 **ALORS** f présente en u un minimum local : c'est à dire il existe un intervalle fermé J centré en u tel que pour tout v de J et différent de u : f(u) < f(v)

Preuve.

Puisque f '' (u) > 0, et f '' est continue , il existe un intervalle fermé J de centre u sur lequel f '' (x) > 0. Choisissons v appartenant à J ; pour tout c de [u, v] , f ''(c) > 0.

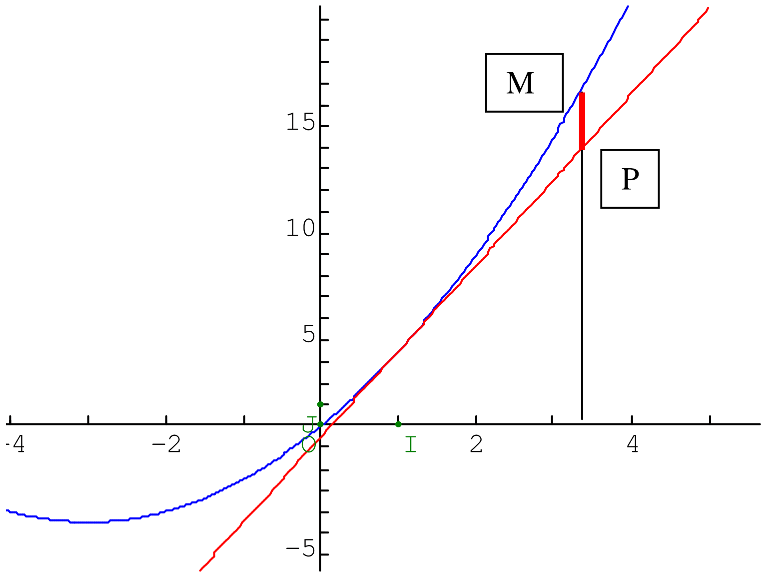
Le théorème 4 appliqué à f pour a =u et b = v donne : $f(v) = f(u) + 0.(v-u) + f''(c)\frac{1}{2}(v-u)^2$.

Le second terme du second membre est nul, le troisième est >< 0 si v est différent de u d'où le résultat annoncé.

Corollaire 2 bis. **Si** f est de classe C^2 sur un intervalle fermé I de centre u et telle que f '(u) =0 et f ''(u) < 0 **ALORS** f présente en u un maximum local : c'est à dire il existe un intervalle fermé J centré en u tel que pour tout v de J et différent de u : f(u) > f(v)

La preuve est identique à celle du corollaire 2.

Définition . Une fonction dont la courbe représentative est au dessus (respectivement en dessous) de sa tangente pour tout x de l'intervalle I de R est dite "convexe" (resp. concave)



Supposons f ''(x) ≥ 0 sur [a,b]

D'après le théorème 4 : $f(x) == f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(c)(x-a)^2$ (i)

y = f(a) + f ' (a)(x - a) est une équation cartésienne de la tangente en M(a, f(a)) à la courbe C

Puisque $\frac{1}{2} f''(c)(x-a)^2 \geq 0$ $\overline{PM}$ = f (x) -[f(a) + f ' (a)(x - a)] ≥ 0 donc la courbe est au dessus de sa tangente.

Propriété. Si f ''(x) ≥ 0 (resp. ≤ 0)sur [a,b] alors f est convexe (rep. f est concave)

2° METHODE (pour mémoire)

I LE THEOREME DE ROLLE (cours)

Théorème 1. (de Rolle)[4] Si f est continue sur l'intervalle [a,b], dérivable sur]a,b[et telle que f(a) = f(b) ALORS il existe au moins un réel c de]a,b[tel que f'(c) = 0.

II THEOREME DES ACCROISSEMENTS FINIS ET INEGALITE DU MEME NOM

Théorème 2 (des accroissements finis).
Si f est continue sur [a,b] et dérivable sur]a,b[, **ALORS** il existe au moins un réel c de l'intervalle]a,b[tel que: f(b)-f(a) = f '(c)(b-a).

On en tire de façon évidente l'énoncé suivant:

[4] En comparant avec la méthode précédente, les hypothèses sur f sont plus faibles puisque que f n'est pas nécessairement de Classe C^1 sur [a,b]. Cependant il faut souligner que le théorème de Rolle peut être une source d'erreur pour la suite car il est faux pour les fonctions vectorielles rencontrées dans des études plus poussées. Si on prend deux points A et B d'une hélice circulaire H , il n'existe aucun point C où la tangente à H soit parallèle à la droite (AB).

***Corollaire**: Inégalité des accroissements finis. Si f est dérivable sur l'intervalle I et si* $\forall x \in I \quad |f'(x)| \le M$, *ALORS tous réels a et b de I vérifient* $|f(b) - f(a)| \le M|b - a|$.

Théorème 3 (Principe de Lagrange) **Si** f est dérivable sur l'intervalle I et si $\forall x \in I \quad f'(x) \ge 0$ **ALORS** f est croissante sur l'intervalle I.

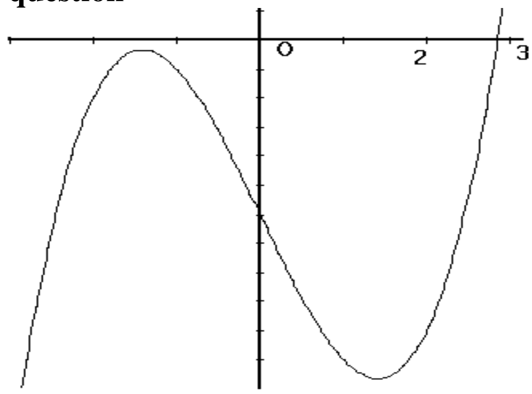
Théorème 4 Si f est dérivable sur I et si $\forall x \in I \quad f'(x) = 0$ ALORS la fonction f est constante sur I.

ANNEXES

Annexe 3. Eléments de solution de la formulation du problème

Exemple1

1°question



ci-contre, le graphe de f tracé sur la calculatrice graphique nous incite a utiliser le Théorème de Bolzano. On démontre que la restriction à de f à [2,3] (continue) est strictement croissante; de plus f(2)f(3)=-30 est négatif,) admet un zéro unique α]1,2[. 20 dichotomies sont nécessaires pour obtenir $2,847321 < \alpha < 2,847322$

2° question

a) $x \in [2,3] \; x^3 - 6x - 6 = 0 \;\; (1) \quad \Leftrightarrow x^3 = 6x + 6$

sur [2,3] 6x+x > 0 donc l'équation équivaut à: $x = \sqrt[3]{6x+6} = \varphi(x)$

L'équation $x \in [2,3] \quad \varphi(x) = x$ admet un solution unique$\alpha \in]2,3[$, solution de (1)

b) :évident.

3° question

a)φ, compose deux fonctions strictement croissantes, elle est strictement croissante sur [2,3], elle est de même continue; ainsi c'est une bijection de [2,3] sur$[\varphi(2), \varphi(3)] = [2,62...;2,88...]$. il vient donc: $\forall x \in [2,3] \quad \varphi(x) \in [2,3]$, c'est à dire $\varphi(I) \subset I$

Par récurrence sur l'entier n: $u_0 = 2$, $u_0 \in I$; si $u_p \in I \quad \varphi(u_p) \in I$, soit $u_{p+1} \in I$

b) La construction de u_0, u_1, u_2, u_3 montre un escalier montant; on peut conjecturer que(u_n) est croissante et converge vers α.

c) $u_0 = 2$, $u_1 = 2{,}62....$ donc $u_0 \le u_1$

Supposons, pour un entier p fixé: $u_p \le u_{p+1}$; puisque φ est croissante,

$$\varphi(u_p) \le \varphi(u_{p+1})$$

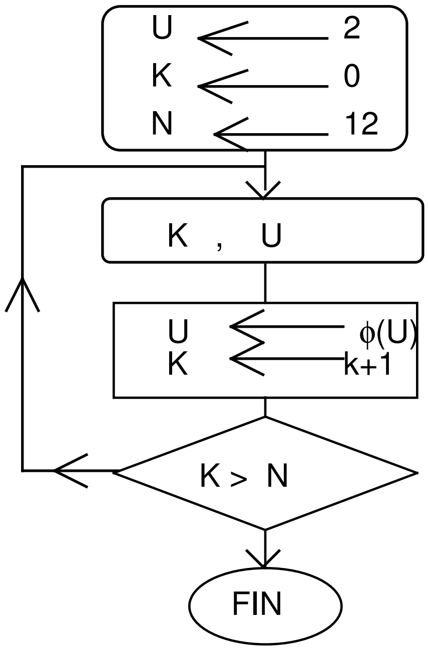
Soit: $u_{p+1} \le u_{p+2}$Donc, par récurrence: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \le u_{n+1}$.

Ainsi, la suite(u_n), croissante et majorée par 3, converge.

L'image par φ de la suite $u_0, u_1, u_2, ..., u_n, ...$

est la suite $u_1, u_2, u_3, ... u_{n+1} ....$

Les deux suites, diffèrent uniquement par u_0, et converge respectivement vers ℓ et $\varphi(\ell)$. Puisque φ est continue; on a donc $\ell = \varphi(\ell)$; $\ell \in]2,3[$; ainsi $\ell = \alpha$ l'unique point fixe de φ sur I.. **4° Question** A la 1° question, 20 dichotomies sont nécessaires pour atteindre la précision 10^{-6}; lors de la 4° question, 10 boucles suffisent pour la même précision. La méthode du point fixe semble nettement "plus rapide".



Initialisation des données: φ est en Y1, 2 va dans U,0 va dans K, et 12 va dans N.

afficher K et U

U reçoit φ(u)
le compteur K reçoit K+1

Si K > 12 arrêt des calculs, sinon reprendre à: afficher K et U.

0	2
1	2,620741
2	2,790291
3	2,833182
4	2,843829
5	2,846460
6	2,847109
7	2,847269
8	2,847309
10	2,847321

Annexe 4 . Eléments de solution de l'activité (1°méthode : Principe de Lagrange)

A. question a) $U = \frac{c'-a'}{c-a}$; $V = \frac{b'-c'}{b-c}$; $W = \frac{b'-a'}{b-a}$. On écrit b'-a' = (b'-c') + (c'-a') (1)

Faisons apparaître U, V, W : (1) s'écrit: $(b-a)\frac{b'-a'}{b-a} = (b-c)\frac{b'-c'}{b-c} + (c-a)\frac{c'-a'}{c-a}$

c'est à dire: (b-a)W = (c-a)U + (b-c)V (2)

A. question b)_ Si $c = \frac{a+b}{2}$, c-a = b-c, donc W est l'isobarycentre de U et V; $W = \frac{U+V}{2}$.
Sur la droite réelle, W est le milieu du segment [U,V].
A question c) plus généralement, si les coefficients de U et V sont de même signe, c'est à dire si $a < c < b$ alors $W \in [U, V]$