CHAPITRE VII

.

CALCUL D'AIRES ET CALCUL INTEGRAL EN TS.

INTRODUCTION

Reprenant les idées développées par H. Lebesgue, je défends dans ce texte qu'il est utile et possible de respecter les fondements de la rationalité mathématique lorsqu'on aborde par les aires le chapitre Intégrale. Dans ce travail qui a pour ambition la démonstration de quelques théorèmes d'analyse élémentaire, ce chapitre a sa place au Lycée en terminale scientifique.
Sans aller jusqu'au développement complet de la théorie de Riemann, il me semble que par le calcul des aires on peut construire de façon cohérente une intégrale qui soit pour l'élève chargée d'un certain sens, et par suite ne se réduise pas à un simple calcul de primitive.

Dans une telle entreprise, le problème didactique essentiel est le suivant : tant qu'on reste à un niveau purement intuitif, l'aire est assurément une notion simple et première, l'obstacle à son utilisation dans un développement cohérent tient au fait que pour lui garder son caractère intuitif et lui donner un statut mathématique, il faut la construire par des procédés limites non élémentaires : encadrements finis et passage à la limite dans la théorie de Riemann, sommations infinies et passage à la borne supérieure dans le cas de la théorie de Lebesgue.
" Les fonctions f continues sur [a,b] ont des primitives sur [a,b], et si F est l'une d'elles alors : $\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$". Etablir ce résultat est "simple" et à la portée des élèves de terminale si " l'intégrale est définie comme étant l'aire sous la courbe" ; malheureusement, pour montrer que l'aire sous une courbe continue existe comme objet mathématique bien défini, le processus d'encadrement et de passage à la limite de Riemann est nécessaire, et pour le réaliser il faut avoir recours au concept de continuité uniforme.

Sans chercher à escamoter cette difficulté et sans avoir recours à ce concept de continuité uniforme qui est résolument hors programme en terminale scientifique, nous essayons dans ce qui suit de montrer par quel choix d'axiomes ou de propositions admises et géométriquement significatives il est possible néanmoins d'aborder le problème de la "mesure" en terminale de telle façon que l'élève puisse, quand il manipule des intégrales, simultanément faire fonctionner son intuition et exercer un contrôle sur ces intuitions, c'est à dire faire des mathématiques.

Comme pour toute question d'Analyse, la difficulté existe. Les concepts doivent être dégagés progressivement, en ménageant les étapes sans lesquelles, l'élève, ou le débutant fut-il excellent, perdrait le sens. Justement, cette notion du sens doit-elle être un objectif prioritaire ? La réponse ne souffre aucune hésitation ; si l'élève de ne retient que quelques algorithmes, quelques formules d'algèbre permettant de calculer les intégrales proposées au baccalauréat, qu'en restera-t-il pour la suite de ses études? Tant au point de vue des savoirs qu'au plan de la formation intellectuelle, les objectifs attribués généralement aux mathématiques sont clairs au niveau du sens.
Si je pose une définition provisoire du nombre $I = \int_a^b f(t)dt$, c'est en ayant conscience que cette approche est pour l'élève un passage nécessaire et utile pour les reconstructions ultérieures.

Le concept de dérivée est né historiquement de la nécessité de résoudre des problèmes de vitesse ou de tangentes à une courbe, on peut de même affirmer qu'après un long cheminement commencé avec Archimède, le concept d'intégrale est né du calcul de l'aire du domaine limité par une courbe.
Dans la première partie de ce chapitre, j'étudie l'évolution historique du concept d'aire par le calcul de l'aire du segment de parabole, d'abord par Archimède selon le procédé dit « par exhaustion », puis par Pascal avec les "indivisibles", enfin en utilisant les définitions posées par H. Lebesgue. Il ne s'agit pas bien sûr de la mesure de Lebesgue mais de la définition de

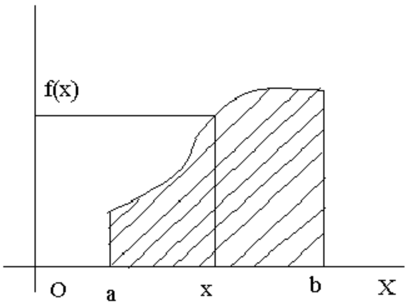
l'aire des surfaces quarrables dans son ouvrage "La mesure des grandeurs"[1], à visée didactique, s'adressant aux enseignants de la classe de "Mathématiques" au début de ce siècle. L'étude de l'histoire d'un calcul comme celui ci vise trois objectifs.
Introduire l'intégrale à partir de l'aire suppose que l'élève ait une idée suffisamment claire de cette notion, même si elle n'est pas définitive. Pour éviter une lecture ambiguë, je tiens à préciser le point de vue adopté au chapitre II : c'est celui d'H. Lebesgue dans son ouvrage "La mesure des grandeurs" cité ci-dessus. Dans ce texte l'auteur s'appuie sur la "Théorie des grandeurs", d'où le titre adopté. Partant de l'idée intuitive d'aire, familière à l'élève depuis le primaire, et choisissant un réseau T du plan qu'on peut indéfiniment subdiviser, il définit l'aire d'un domaine D. Le mot "domaine" ayant ici le sens, volontairement imprécis, qu'on lui donne en géométrie élémentaire.
Dans un premier temps, il analyse les conséquences des propriétés intuitives de la fonction d'aire. Une unité d'aire étant choisie, celle du carré de côté un (unité de longueur), il démontre que les rectangles, les polygones ont une aire et que celles-ci ont les propriétés de l'aire rencontrée dans la pratique. Il en déduit un critère pour qu'un domaine ait une aire, cette fois indépendamment du choix d'un réseau initial. Il développe cette synthèse en vérifiant que l'aire qu'il a définie est bien celle qu'on voulait, qu'elle vérifie les propriétés intuitives de l'aire et qu'elle est déterminée de façon unique par le choix d'une unité.
C'est ainsi qu'il s'exprime [2]:
"De sorte que, même en considérant les mathématiques comme une science expérimentale, il est important de démontrer que les aires que nous venons de considérer sont entièrement déterminées par les conditions suivantes:
α *-- A chacun des domaines d'une famille de domaines dont font partie tous les polygones est attaché un nombre positif que l'on appelle son aire.*
β *-- A un domaine formé par la réunion de deux autres extérieurs l'un à l'autre est attachée comme aire la somme des aires des deux autres.*
γ *-- A deux domaines égaux sont attachées des aires égales.*
De plus, on verra:
δ *-- Ces nombres aires sont entièrement fixés numériquement quand on connaît l'aire attachée à l'un des domaines."*
Ces dernières propositions débouchent sur la nécessité d'un choix d'axiomes que nous donnerons à l'élève de terminale en faisant remarquer qu'il s'agit exactement des "propriétés intuitives" ci-dessus.

Les raisonnements développés dans son ouvrage par H. Lebesgue ont pour objet de montrer l'existence et l'unicité de l'aire pour des surfaces quarrables simples comme les rectangles et les polygones par des procédés "relativement accessibles" à des élèves de terminale[3]. Par contre pour le sujet qui nous occupe ici : prouver que le domaine sous la courbe représentative Cf d'une fonction continue et positive sur [a,b] est quarrable, il n'y a pas hélas de démarche simple. Le procédé rigoureux le plus rapide consiste à développer la théorie de l'Intégrale de Riemann d'une fonction continue. Cette théorie prouve l'existence de cette aire et dans la même démonstration l'existence d'une primitive pour une fonction continue sur un intervalle I de R. La propriété sera donc admise pour les raisons citées plus haut, et viendra s'ajouter aux propriétés intuitives de l'aire que nous avons appelé axiomes.

---

[1] En effet, au début du siècle, est introduit, pour la première fois dans la classe de "Mathématiques ", un enseignement de l'intégrale. Celui-ci est promu par les plus grands mathématiciens de l'époque comme R.Poincaré et H. Lebesgue. Ce dernier publiera entre les années 1930 et1935 des conseils destinés aux professeurs du secondaire ; ces conseils seront réunis ensuite dans l'ouvrage cité ci-dessus.
[2] In "La mesure des grandeurs", chapitre III, §31
[3] Dans son ouvrage "Sur la mesure des grandeurs" H.Lebesgue ne cesse d'avertir le lecteur que les démonstrations qu'il présente ne sont pas toutes destinées à l'élève, notamment lorsque la difficulté est patente.

Ayant ainsi exploré avec les élèves la notion d'aire, peut-on pour autant envisager comme définition provisoire de l'intégrale en TS : "l'intégrale d'une fonction continue et positive sur [a,b] est l'aire, au sens intuitif, du domaine Δ sous la courbe, $A(\Delta)=\int_a^b f(t)dt$."?:



Argumentons

a) Cette définition fait appel à l'expérience des élèves, familiarisés dès le primaire avec l'aire associée aux polygones et les propriétés intuitives de celle-ci.

b) L'interprétation géométrique de l'aire sous la courbe rend intuitive pour une fonction positive certaines propriétés de l'intégrale : la linéarité, la positivité, les majorations.

c) les calculs approchés de l'intégrale en interpolant f par des fonctions polynômes de degré 0, 1 ou 2 sont alors naturels puisqu'on approche une aire par une aire voisine.

Pour rendre la définition "opératoire" la propriété suivante est nécessaire :
« Soit Δ le domaine sous la courbe Cf où f est continue et positive sur [a,b] ; alors l'aire de Δ est $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$ où F est une primitive de f sur [a,b] ». Or dans le point de vue adopté ici , nous avons la possibilité de "démontrer" ce théorème important d'Analyse élémentaire en précisant avec soin les prémisses afin d'éviter tout cercle dans le raisonnement.
Enfin, citons la remarque de H. Poincaré en 1904 au musée Pédagogique, sur le problème de l'intégrale au lycée à propos de l'élève de la classe de Mathématiques: " *Il croit savoir ce qu'est une surface, et il ne comprendra qu'il ne le sait pas que quand il saura très bien le calcul intégral; ce n'est donc pas au moment où il aborde ce calcul qu'il peut y avoir intérêt à le lui dire. Alors ce qui reste à faire est bien simple : définir l'intégrale comme l'aire comprise entre l'axe des x, deux ordonnées et la courbe, montrer que quand l'une des ordonnées se déplace, la dérivée de cette aire est précisément l'ordonnée elle-même..." ;*

Il importe de montrer rapidement les méthodes de calculs approchés de l'aire pour ne pas réduire l'activité de l'élève au seul calcul algébrique des primitives des fonctions usuelles. Ce sea l'objet du chapitre suivant de cette étude. De plus, ces calculs approchés, qui ont l'avantage, dans cette procédure, de découler directement de la définition adoptée pour l'intégrale et de son interprétation géométrique, sont aussi l'occasion dans le cas de fonctions continues et monotones de démontrer de nouvelles propriétés sur les suites et les intégrales[4]. Pour allier la rigueur à l'intuition dans cette démarche, il est nécessaire de les accompagner du calcul de majorants des erreurs, bien sûr lorsque celui-ci est suffisamment simple.
Si une telle définition est adoptée dans un cours de terminale scientifique, peut-on objecter que le temps requis pour les deux chapitres dépasse, en proportion, la place du sujet abordé ?
Le temps passé au Lycée à la démonstration de quelques propriétés importantes[5] de l'analyse élémentaire est-il du temps perdu pour l'élève et le futur étudiant ? Je pense le contraire, c'est la démonstration qui donne "les raisons" de la vérité des propositions ; et son absence a des

[4] La somme des aires des rectangles qui majorent où minorent l'aire sous la courbe sont des suites qui convergent vers l'intégrale.
[5] Ici les démonstrations d'Archimède, de B. Pascal, les axiomes et définitions de l'aire posés part H. Lebesgue, la propriété "L'Intégrale est l'aire sous la courbe".

conséquences néfastes[6] lors de la poursuite de son cursus après le baccalauréat. Confronté trop brutalement à de nécessaires formalisations[7] ou généralisations, il n'en verra par toujours les raisons et/ou ne saura pas toujours soutenir son attention.

L'approche historique du Chapitre1 est-elle un simple "plus" culturel pour sacrifier à ce qui serait une mode ? Ce n'est pas mon avis, la description des approches successives de la notion d'aire participe à l'acquisition progressive du sens d'un concept difficile, celui "d'aire" derrière lequel on trouve celui de "mesure" ; et ce sens sera dans la foulée investi dans la définition de l'intégrale lors de la seconde partie du chapitre. De plus l'évolution de la démonstration d'un même résultat selon les époques montre que la notion du vrai est liée au contexte, à l'avancement du savoir, et donne une dimension humaine à ces spéculations souvent perçues comme abstraites.

Ainsi le travail réalisé par l'élève pendant ces heures ne se limite pas à la seule définition de l'intégrale mais touche aux aspects essentiels du programme d'Analyse en vigueur[8], aussi bien dans l'esprit que dans la lettre.

LES PREREQUIS

L'étude développée ici suppose qu'un certain nombre de notions qui figurent au programme ont été abordées antérieurement :

-Les théorèmes sur les limites de fonction, la continuité en un point et sur un intervalle, enfin la dérivabilité en un point et sur un intervalle et la notion de primitive.

-Les théorèmes sur les limites de suites et en particulier la convergence des suites monotones et bornées[9] qui permet de définir un réel par deux suites adjacentes.

REMARQUE 1. A plusieurs reprises, je donne en annexe des éléments de solution des problèmes proposés aux élèves pour que le lecteur puisse évaluer rapidement le degré d'approfondissement.

REMARQUE 2 Pour une meilleure lisibilité j'encadre dans le texte tous les énoncés définitions et théorèmes proposés aux élèves.

---

[6] De nombreux enseignants en D.E.U.G, en IUT ou en classe préparatoire le pensent aussi.

[7] Dans tout ce texte j'utilise le mot "formel" ou "formalisation" dans le sens " vérification des conjectures qui peuvent être faites à l'issue d'un stade graphique ou calculatoire" : il s'agit donc dans le cas présent de démontrer. Cette terminologie est empruntée au pédagogue Jérome Bruner. (professeur à Harvard en 1960)

[8] L'actuel, celui de juin 97. Le programme prévu pour 2002 adopte l'aire sous la courbe comme définition de l'intégrale.

[9] Ce résultat est admis dans le cours de TS (spécialité math), dans le programme de Juin 1994 ; il disparaît alors, mais sera rétabli en 2002.

1° PARTIE

HISTORIQUE DU CALCUL DE L'AIRE DU SEGMENT DE PARABOLE.

A QUADRATURE DU SEGMENT DE PARABOLE PAR ARCHIMEDE.

I ACTIVITE

Prérequis : (programme de1°S) : Equation de la parabole. Dérivée et coefficient directeur de la tangente à une courbe. Suites géométriques, convergence.

Propriétés géométriques du segment de parabole

Soit la parabole (P) d'équation $y = ax^2$ (a < 0) dans un repère orthonormal du plan (fig1). Soit A et C deux points distincts de (P), d'abscisses respectives α et γ ; le segment de parabole limité par la corde [AC] est le domaine plan compris entre l'arc de parabole AC et la droite (AC). Soit Σ son aire, dans l'unité qui sera choisie ultérieurement.

1°question Soit D le milieu du segment de droite [AC] ; démontrer qu'il existe un point B et un seul de l'arc AC où la tangente à (P) est parallèle à (AC).

On précisera ses coordonnées en fonction de a, α et γ. Démontrer alors que la droite (BD) est parallèle à l'axe y'Oy. Cette droite (BD), lieu du milieu des cordes parallèles à la tangente en B à la parabole, sera appelée «le diamètre de la parabole (P) relatif à la corde [AC] »(fig2).

2°question Considérant le parallélogramme ACC'A' (fig2), où (A'C') est la tangente à (P) en B, démontrer les relations : et$\Sigma - \text{aireABC} < \text{aireABC}$ (1). Nous dirons, dans la suite, que ABC est «le triangle inscrit » dans le segment de parabole relatif à la corde [AC]. Les segments de parabole relatifs aux cordes [AB] et [BC] (fig2) seront appelés « les segments restants » relatifs au « triangle inscrit » ABC. Le résultat (2) sera noté :

Lemme 1 " La différence entre l'aire du segment et l'aire du « triangle inscrit » est inférieure à l'aire de ce triangle."

Désormais, pour simplifier, l'unité d'aire sera celle du triangle ABC.

Duplication

1°question A chacun des « segments restants » relatifs à [AB] et [BC], on associe leur « triangle inscrit », AFB et BF'C. Soit G le milieu de [AB], la droite (GF) est le diamètre de la parabole relatif à la corde [AB] ; cette droite coupe (AD) en E (fig3). Démontrer les relations suivantes : $EG = \frac{1}{2}BD$ et $FG = \frac{1}{4}BD$; en déduire : $\text{aireAFB} = \frac{1}{4}\text{aireADB}$;

AFB et BF'C sont appelés les « deux triangles ajoutés » au « triangle inscrit initial ABC, c'est pourquoi nous appelons cette construction : duplication. Démontrer le lemme suivant :

Lemme 2 L'aire des deux triangles ajoutés » est égale au quart de l'aire du « triangle inscrit » dans le segment de parabole.

2°question Cette duplication génère un polygone $P_1 = AFBF'C$ inscrit dans le segment de parabole relatif à [AC]. Soit S_1 l'aire de P_1 et s_1 l'aire des quatre « segments restants » (fig4) relatifs aux cordes $[AF],[FB],[BF']$ et $[F'C]$. Soit T_1 l'aire des « triangles ajoutés » AFB et BF'C, démontrer les relations suivantes : $S_1 < \Sigma$; $S_1 + s_1 = \Sigma$; $T_1 = \frac{1}{4}$; $S_1 = 1 + \frac{1}{4}$; $\Sigma - S_1 < \frac{1}{4}$

FIGURES : LA PARABOLE (P) d'équation $y = x^2$ (a <0)

fig1

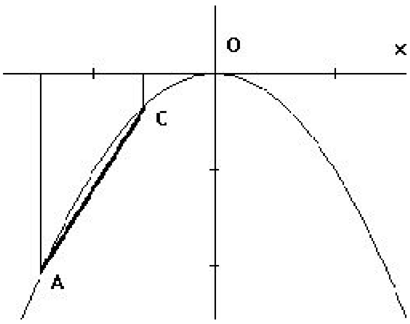
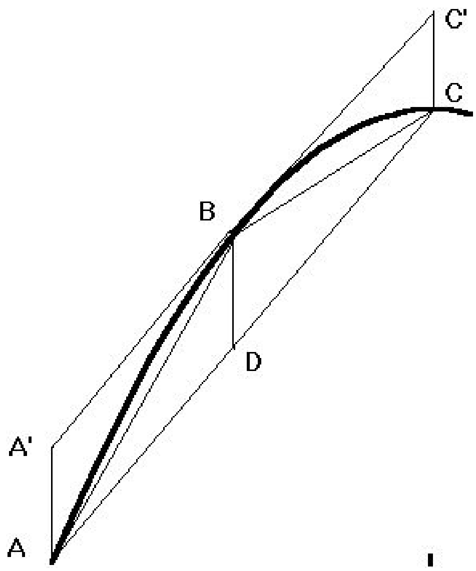


fig2



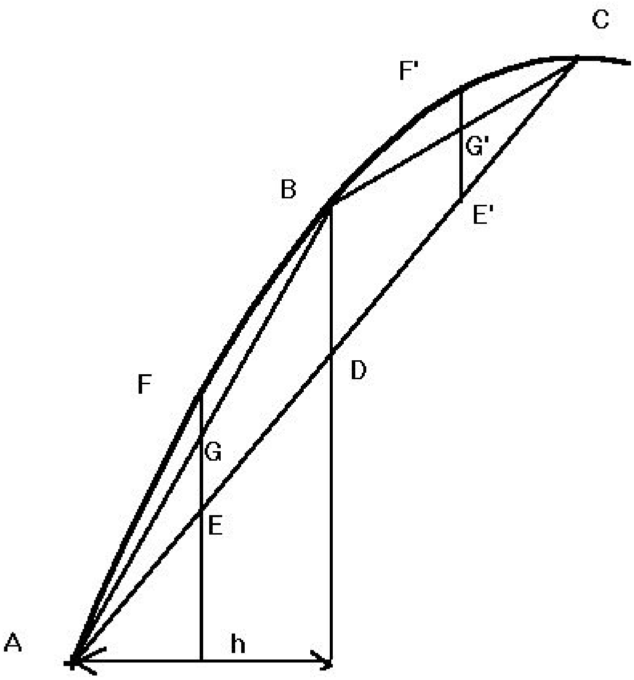
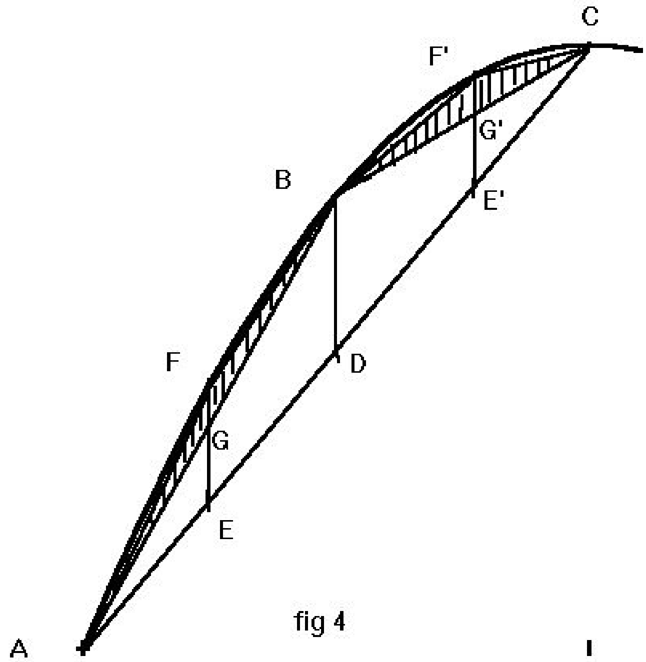


Fig3



II COURS : DEMONSTRATION PAR ARCHIMEDE[10]

Soit Σ l'aire du segment de parabole de corde [AC] (fig3). Suite à une duplication, le polygone inscrit P_1 a pour aire S_1 et on a les relations suivantes[11] :

$S_1 = 1+\frac{1}{4}$; $S_1 < \Sigma$ et $\Sigma - S_1 < \frac{1}{4}$ (aire des triangles ajoutés). Après deux duplications, P_2 et son aire $S_2 = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}$ vérifie ;$S_2 < \Sigma$ et $\Sigma - S_2 < \frac{1}{4^2}$. Après n duplications , pour le nième polygone inscrit P_n et son aire S_n ; $S_n < \Sigma$ et $\Sigma - S_n < \frac{1}{4^n}$(aire des derniers ajoutés).

Donc $S_n = 1+\frac{1}{4}+......+\frac{1}{4^n}$. Or $\frac{1}{4}+\frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}$, ainsi : $\frac{1}{4^n}+\frac{1}{3.4^n}=\frac{1}{3.4^{n-1}}$

Il vient : $S_n + \frac{1}{3.4^n} = 1+\frac{1}{4}....+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{3.4^n} = 1+\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{4^{n-1}}+\frac{1}{3.4^{n-1}}$

Après n-1 simplifications du second membre , on obtient :

$S_n + \frac{1}{3.4^n} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{3.4} = 1+\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$; d'où la propriété

Lemme Après un nombre fini de n duplications successives , on a :

$$S_n < \Sigma \; ; \; \Sigma - S_n < \frac{1}{4^n} \quad \text{et} \quad S_n + \frac{1}{3.4^n} = \frac{4}{3}$$

Il est nécessaire de préciser aux élèves qu'Archimède n'utilise pas le passage à la limite, inconnue à l'époque. Il écarte également toute allusion à l'infini pour que sa démonstration soit "acceptée" dans le cadre de la mathématique grecque de l'époque. Il emploi un double raisonnement par l'absurde.

1° cas. Si $\Sigma > \frac{4}{3}$; $\Sigma = \frac{4}{3}+u$ et $u > 0$. Après un nombre suffisant n de duplications, on peut rendre $\frac{1}{4^n} < u$ donc $\Sigma - S_n < u$; ainsi $\frac{4}{3}+u-S_n < u$ donc $\frac{4}{3} < S_n$. Ceci est impossible d'après le lemme ci-dessus.

2° cas. Si $\Sigma < \frac{4}{3}$; $\frac{4}{3} = \Sigma + v$ et $v > 0$. De même, après n duplications on peut rendre l'aire des triangles ajoutés $\frac{1}{4^n} < v$. . Ainsi $\frac{1}{4^n} < \frac{4}{3} - \Sigma$;or $\frac{1}{3.4^n} = \frac{4}{3} - S_n < \frac{1}{4^n}$

doncainsi $\frac{4}{3} - S_n < \frac{4}{3} - \Sigma$, donc $S_n > \Sigma$. Ce qui est impossible ; par conséquent. $\Sigma = \frac{4}{3}$

Théorème. L'aire du segment de parabole de base [AC] est égale à $\Sigma = \frac{4}{3}$, l'unité d'aire est celle du triangle ABC, B est le point de l'arc AC où la tangente à la parabole est parallèle à [AC]. (voir la figure 2)

---

[10] Le procédé utilisé, dit "par exhaustion", déjà employé par Eudoxe et Euclide, consiste ici en un double raisonnement par l'absurde épuisant tous les cas. Notons encore qu'Archimède évite volontairement toute considération de l'infini.

[11] Bien entendu la démarche d'Archimède est traduite ici en écriture moderne, le principe en étant respecté.

B QUADRATURE DU SEGMENT DE PARABOLE PAR B. PASCAL[12]

I COURS : Démonstration par la méthode des indivisibles.[13]

Les prérequis

Dans un traité sur la somme des puissances B.Pascal démontre les résultats suivants que nous admettrons ici : soit la suite arithmétique de raison r et de n termes , le premier étant 0,

$S_1 = 0 + r + 2r + ... + (n-1)r$ alors $2rS_1 = (n^2 - n)r^2$ (a)

$S_2 = 0 + r^2 + 4r^2 + ... + (n-1)^2 r^2$ alors $3rS_2 = (n^3 - n)r^3 - 3r^2 S_1$ (b)

Calcul de l'aire sous la courbe (C) ($y = x^2$) et les droites x = 0 et x = 1. Le repère est orthonormal. Soit Σ cette aire dans l'unité liée au choix du repère.

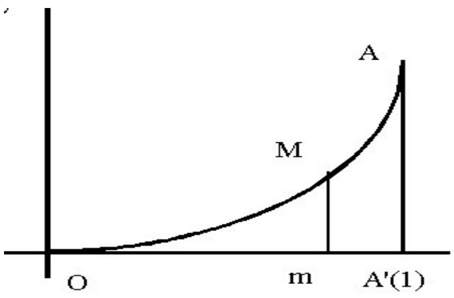


fig 4

Chaque segment de droite [mM] est appelé "ligne" et considéré comme "indivisible, infiniment petit. Pour calculer Σ, B.Pascal fait la somme de ces" lignes" comme si elles étaient des rectangles de largeur "indivisible". Leur ensemble constitue une suite semblable à celle d'une suite arithmétique de raison "l'indivisible". Soit i l'indivisible , i.mM est l'aire d'un rectangle. Pour calculer l'aire Σ on envisage d'abord la somme des aires des rectangles.

Si on partage en n "indivisibles", les abscisses sont 0, i, 2i, ….,(n-1)i ; l'aire du kième rectangle est $i \times (k^2 i^2)$ et la somme des aire des n rectangles est $\Sigma_2 = iS_2$[14] ; en reprenant la notation ci-dessus dans la formule (b) avec r = i il vient :

$iS_2 = 0 + i(i^2) + i(2i)^2 + ... + i(n-1)^2 i^2$

$3iS_2 = n^3 i^3 - ni^3 - 3i^2 S_1$; $ni = 1$ donc $(ni)^3 = 1$

et $3iS_2 = 1 - i^2(1 - 3S_1)$ donc $3\Sigma_2 = 1 - i^2 + 3i^2 S_1$

En passant à la limite, et c'est l'audace de Pascal et ses contemporains, on considère i^2 comme négligeable par rapport à 1 (démarche qu'on scrupuleusement refusée les Grecs). Il vient alors dans la dernière égalité : 3Σ = 1 donc $\Sigma = \frac{1}{3}$. L'élève établira, en changent d'unité d'aire et considérant ce qu'Archimède appelait "le segment", que ce dernier résultat est équivalent à celui établi par Archimède 20 siècles plus tôt.

Théorème. Dans un repère orthonormé du plan, l'aire limité par l'axe de x, la Parabole ($y = x^2$) et les droites (x = 0) et (x = 1) est égale à 1/3.

II TRAVAUX PRATIQUES : application au segment de parabole

[12] C'est dans la conclusion du traité appelé "Potestatum numericarum summa"- somme des puissances des nombres (1655) que l'on trouve cette démonstration par B. Pascal..

[13] On doit la notion d'indivisible à l'italien Cavalieri.

[14] iS_2 est la somme des aires des n rectangles, c'est pourquoi dans la formule b) Pascal ne simplifie pas par r.

La méthode des rectangles pour calculer l'aire du segment de parabole.

S'inspirant directement de la méthode ci-dessus, mais en considérant des rectangles de largeur non plus "indivisible", mais 1/n, développons un calcul de l'aire du segment de parabole. Nous utiliseront les résultats sur les suites connus en I°S et TS. Les calculs confirment le résultat de B. Pascal, et de plus sont généralisables à d'autres domaines plans, pour un calcul exact ou approché de l'aire.

Prérequis. Pour tout entier n > 0, si on désire "faire vite"[15], on a, par récurrence sur n:

$$1^2 + 2^2 + \dots\dots\dots\dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ENONCE

Soit la parabole (P) d'équation $y = x^2$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ repère orthonormal du plan.

Soit la fonction f définie sur [0,1] par $f(x) = x^2$. On appelle Δ le domaine plan limité par la courbe l'axe x'Ox et les droites d'équation x = 0 et x = 1.

Soit Σ l'aire de ce domaine Δ, dans l'unité d'aire imposée par le choix du repère. Partageons l'intervalle [0,1] en n intervalles de même longueur 1/n, n entier non nul. Les abscisses des bornes des intervalles sont: $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots\dots\dots \frac{k}{n} \dots\dots\dots \frac{n-1}{n}$.

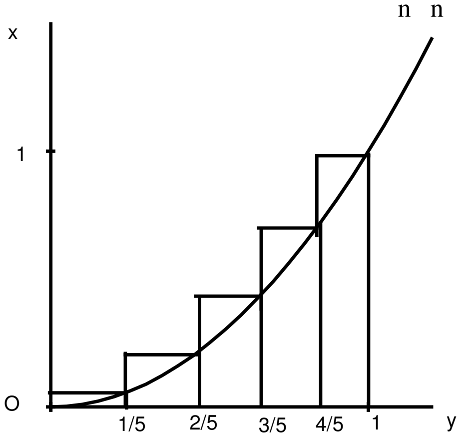


fig6

STADE GRAPHIQUE ET STADE DU CALCUL

1° question. a) On pose n = 5, calculer $S_5 = \frac{1}{5}\left[(\frac{1}{5})^2 + (\frac{2}{5})^2 + .. + (\frac{5}{5})^2\right]$. Démontrer que S_5 est une valeur approchée par excès de Σ. On s'inspirera de la figure ci-dessus et de la monotonie de f.

b) On pose n = 20, calculer la somme $S_{20} = \frac{1}{20}\left[(\frac{1}{20})^2 + \dots\dots\dots + (\frac{19}{20})^2 + (\frac{20}{20})^2\right]$.

Démontrer que S_{20} est une valeur approchée par excès de Σ.

2°question. L'entier n > 1, on pose $S_n = \frac{1}{n}\left[(\frac{1}{n})^2 + (\frac{2}{n})^2 + \dots\dots\dots + (\frac{k}{n})^2 + \dots\dots\dots + (\frac{n}{n})^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}(\frac{k}{n})^2$

Démontrer que S_n est la somme des aires de n rectangles de largeur commune 1/n. En déduire que S_n est une valeur approchée par excès de Σ.

[15] Il faut reconnaître que le procédé, rapide certes, est artificiel. Notons que ce résultat fait l'objet d'un exercice souvent résolu en 1°S par un procédé algorithmique très connu.

3°question[16] Organigrammes et programme sur calculatrice

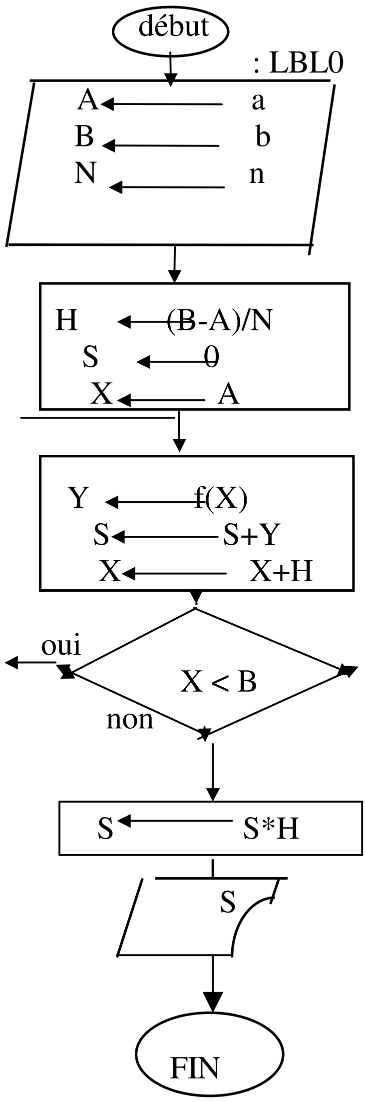
PRGM RECTANGLE
DEBUT
ENTRER A,B,N , f

Faire (B-A)/N va dans H
Faire 0 va dans S
Faire A va dans X

FAIRE
Faire f(X) dans Y
Faire S+H dans S
Faire X+H dans X
Tant que X < B
SI OUI REPRENDRE AU SECOND pavé
SINON FAIRE

Faire S*H dans S

Ecrire la valeur S approchée



A partir de l'organigramme ci-dessus, établir un programme sur votre calculatrice, permettant de calculer S_n pour tout entier n fixé.
Compléter le tableau de valeurs ci-dessus:

n	5	10	20	50	100
S_n					

Que peut-on conjecturer pour la suite S_n?

[16] L'élève doit établir à l'aide de l'organigramme le programme que je donne ici pour mémoire. Cette utilisation des possibilités de calcul de la machine est capitale puisqu'elle permet des conjectures qui justifierons le stade formel, celui de la démonstration au 2.2.

2 STADE FORMEL (DEMONSTRATION)
ENONCE

On admettra que si U et V ont une aire, si U est inclus dans V, alors: aire U$\leq$ aire V.

1°question_ Les notations demeurant celles du §1, on pose pour tout entier n$\geq$1

$$S'_n = \frac{1}{n}[(\frac{0}{n})^2 + (\frac{1}{n})^2 + \ldots\ldots + (\frac{k}{n})^2 + \ldots\ldots + (\frac{n-1}{n})^2]$$

a) Démontrer que S'_n est la somme des aires de n rectangles de largeur 1/n. b) En déduire que pour tout entier n $\geq$1: $S'_n \leq \Sigma \leq S_n$

on fera une figure soignée pour n = 5.

2° question

Démontrer que : $\forall n \in N^* \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \leq \Sigma \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$

En déduire la valeur exacte de Σ en unités d'aire.

Faisons le point rapidement sur le calcul des aires curvilignes au XVII° siècle.
La méthode ci-dessus, utilisée par Pascal et d'autres contemporains, est assez féconde, puisqu'elle permettra, pour les fonctions du type $x \to x^n$ sur [0,1],de trouver l'aire $\frac{1}{n+1}$.
Soulignons que la méthode est inopérante pour trouver la valeur exacte, lorsqu'on ne peut atteindre la limite des suites(S_n), ce qui est la plupart du temps le cas .
Il faudra attendre Leibniz (1674) pour savoir clairement que " Le problème des quadratures est le problème inverse des tangentes." Pour la première fois est énoncé le lien entre le calcul des aires et les primitives d'une fonction; pour la premiers fois est utilisé par Leibniz l'écriture: $\int f(x)dx$. Dans cette notation, dx désigne la largeur d'un "petit rectangle", f(x) désigne sa longueur et $\int$ signifie la somme des aires de ces rectangles, après passage à la limite.

C NOTION D'AIRE SELON H. LEBESGUE[17]

Notons à ce stade une précision importante : l'emploi du mot mesure dans l'expression "mesure des aires" rappelle qu'on doit avoir nécessairement choisi une unité pour pouvoir parler de l'aire qui est donc un nombre réel positif.
En terminale, l'aire n'est pas une entité différente du nombre qui la mesure dans l'unité choisie, en conclusion l'aire est un nombre et dans la suite de ce texte il n'y aura pas d'aire sans unité choisie.

Dans les parties A et B de notre étude, nous avons admis que l'aire d'un rectangle dont les longueurs des côtés ont pour mesure a et b dans l'unité u est le produit a.b dans l'unité u^2; on en déduit alors la mesure de l'aire d'un triangle. Il a été aussi admis que les polygones inscrits dans le segment de parabole avaient une aire, inférieure à Σ, dont l'existence est aussi admise. Il est logique de se poser à ce stade les questions d'existence et d'unicité à propos d'aire des domaines du plan.

I ACTIVITE Sur un texte d'H.Lebesgue

Dans son introduction au chapitre sur la mesure des aires H.Lebesgue dit ceci:
" Pour évaluer les longueurs des différents segments AB portés par une droite, nous avons construit sur cette droite, à partir d'un point ω et dans les deux sens, une graduation en unités U, une graduation en unités U_1[18] etc. Et c'est la comparaison de AB à la graduation totale T, à intervalles indéfiniment petits, ainsi obtenue qui permettait de définir et d'évaluer la longueur de AB. Nous procéderons exactement de la même manière.
Soit, donné en position dans le plan considéré, un carré C, soient ωx et ωy *les droites portant deux de ses côtés. Parallèlement à* ωx*, traçons toutes les droites dont les distances à* ωx *sont des multiples entiers du côté C, faisons de même parallèlement à* ωy*. Nous couvrons le plan d'un réseau R de carrés égaux à C, que nous appellerons les carrés U. Subdivisons les côtés de ces carrés en dix parties égales, par les points de subdivision menons les parallèles à* ωx et ωy*, nous obtenons un réseau R_1 de carrés qui sont dits les carrésU_1. On passe de même à un réseau R_2 de carrés U_2 etc. La réunion de tous ces réseaux donne ce que nous appellerons le réseau total T déduit de C. C'est par comparaison à T que nous allons définir et évaluer les aires."*

Calcul sur un exemple

ENONCE (avec les résultats obtenus)

Pour expérimenter la méthode décrite ci-dessus par H.Lebesgue, on se donne un domaine D tracé sur une feuille de papier millimétré; on propose aux élèves d'en déduire un encadrement de l'aire de D, le meilleur possible, par rapport à l'unité choisi, ici le carré U de 10cm de côté.
Pour un domaine D que j'ai proposé aux élèves[19], nous avons obtenus les résultats suivants:

- Sur le réseau R, il y a 1 carré U inclus dans D et 5 carrés U contenant des points de D. Posons n = 1 et N = 5
- IL vient donc: $1 \leq \frac{127}{100} \leq .... \leq \frac{175}{100} \leq 5$

[17] Nous plaçant résolument dans le cadre de la théorie des grandeurs, la longueur d'un segment est un nombre réel positif désignant , par abus de langage, sa mesure dans une unité choisie ; de même pour l'aire d 'un domaine ce sera un réel positif désignant la mesure de l'aire dans une unité choisie.
[18] *U1=10 U*
[19] Le quadrillage étaient partagés en régions distinctes couvrant tout le domaine de façon à partager le travail entre les élèves.

- En continuant sur le réseau R_2 (un U_2 contient $100U_1$), on obtient, avec patience, l'encadrement suivant de l'aire de D:

$$1 \leq \frac{127}{100} \leq \frac{15173}{100^2} \leq \text{aire de D} \leq \frac{15603}{100^2} \leq \frac{175}{100} \leq 5$$

On convient de dire que 1 , $\frac{127}{100}$, $\frac{15173}{100^2}$ sont des valeurs approchées par défaut de l'aire de D; et 5 , $\frac{175}{100}$, $\frac{15603}{100^2}$ sont des valeurs approchées par excès de D.

II Définition de l'aire par H.Lebesgue (COURS)

Reprenons la méthode de H.Lebesgue pour la définition ci-dessous.

§.1 Définition

Définition . On définit ainsi, en imaginant que le procédé vaut pour tous les réseaux R_i, i entier supérieur à 1; deux suites de nombres réels :$(\frac{n_i}{100^i})$ et $(\frac{N_i}{100^i})$. Lorsque ces deux suites sont adjacentes, elles convergent vers le même réel L, ce réel est appelé l'aire de D par rapport à l'unité U.

§.2 Applications de la définition

a) Aire du rectangle

A partir de cette définition 0, H.Lebesgue démontre que l'aire d'un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes du quadrillage et de dimension a et b est a.b. Lorsque a et b sont des nombres décimaux, les deux suites citées en définition sont constantes à partir d'un certain rang , c'est un bon exemple à traiter avec l'élève car les côtés du rectangle sont confondus avec les lignes de réseaux R_i ou R_j, et le résultat a.b est immédiat. Par contre si a ou b sont non décimaux, ils sont définis par leur développement décimal illimité, et la démonstration est trop longue pour l'enjeu; perdant ainsi son intérêt en TS.

_ b) Aire des polygones. Nous admettrons aussi qu'un segment à une aire nulle, résultat clé pour montrer que les polygones ont une aire. Nous admettrons que l'aire des rectangles existe lorsque les côtés ne sont pas parallèles au quadrillage, ce que H.Lebesgue appelle l'invariance par déplacement.

III UNE CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE POUR QU'UN DOMAINE AIT UNE AIRE.

Pour s'affranchir du choix du réseau T qui couvre le plan, H.Lebesgue démontre la propriété suivante[20]:

Théorème. *Pour qu'un domaine D ait une aire, il faut qu'il puisse être couvert par un polygone E et qu'il couvre des polygones I, extérieurs les uns aux autres, et de manière que l'aire de E surpasse la somme des aires des I d'aussi peu que l'on veut. La réciproque est vraie*."

Nous en tirons le corollaire suivant, plus pratique à utiliser par nos élèves:

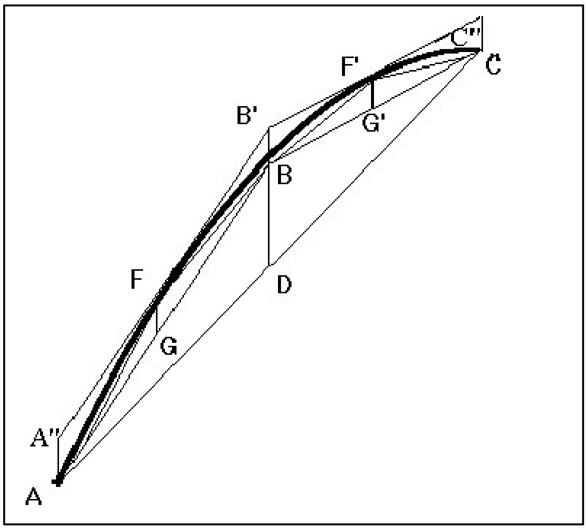
Corollaire. _Pour qu'un domaine plan D ait une aire, il faut et il suffit qu'il existe deux suites de polygones "inclus" dans D et "recouvrant" D, et que leurs aires respectives (s_n) et (S_n)soient deux suites adjacentes; l'aire de D est leur limite commune L.

[20] In "La mesure des grandeurs , Chapitre II, page 40.

§.1 Application au calcul de l'aire du segment de parabole. (COURS)

Reprenant le fil conducteur de cette étude, nous posons la question : le segment de parabole admet-il une aire selon H.Lebesgue? et si oui que vaut-elle? Revenons aux notations du A (aire selon Archimède), et utilisons les résultats géométriques du segment de parabole démontrés alors. Soit ABC le " triangle inscrit " dans le segment de parabole relatif à la corde AC, soit D le milieu de [A,C], et (BD) le" diamètre" relatif aux cordes parallèles à (AC).

fig5



L'aire du triangle ABC est choisie comme unité d'aire. Revenons à la fig 4 page 10. Le polygone inscrit est le triangle ABC. Le polygone contenant le segment est le parallélogramme ACC'A'. Après la première duplication (fig5 ci-contre), le polygone inscrit est AFBF'C. Le polygone circonscrit est AA"FB'F'C"C. On Pose S_n et s_n les aires respectives des polygones circonscrits et inscrits après n duplications. Nous avons démontré les résultats suivants au A:

$s_0 = 1$; $S_0 = 2$; $S_0 - s_0 = 1$ $s_1 = 1 + \frac{1}{4}$; $S_1 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$; $S_1 - s_1 = \frac{1}{4}$ $S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n}$; $S_n = s_n + \frac{1}{4^n}$; $S_n - s_n = \frac{1}{4^n}$

Les suites (s_n) et (S_n) sont adjacentes (résultat aisé à établir), elles ont donc une limite commune L. puisque (s_n) est la somme des n+1 premiers termes d'une suites géométrique de raison 1/4, il vient donc:

$L = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$. Ceci prouve, d'après le corollaire du paragraphe précédent, que, selon H.Lebesgue, le segment de parabole admet une aire et celle ci vaut $\frac{4}{3}$ unités d'aire. Ainsi la boucle est bouclée, si l'on peut dire; les calculs d'Archimède et de Pascal sont exacts et correspondent au concept d'aire contemporain, précisé par H.Lebesgue.

§ 2 Aire du disque, approche du réel π. (Travaux pratiques)

Le disque admet-il une aire selon la définition d' H. Lebesgue, si oui quelle est celle-ci ? Le résultat étant connu par un élève de TS ; l'intérêt réside ici dans la méthode : une approche "naturelle " de l'irrationnel π. Je propose ce problème classique sous la forme de Travaux Pratiques en application du corollaire.[21]

ENONCE

§2.1 Stade de dessin (voir fig8 et fig9)

AC est le côté du polygone inscrit, A'C' celui du polygone circonscrit (fig8).A l'étape suivante, AB et A"B"' les remplacent (fig7). OI est l'apothème au rang n, J milieu de [A"B"'] et K milieu de [AJ], OK est l'apothème du polygone inscrit, au rang suivant n+1. Le cercle (C) de centre O et de rayon 1 a pour aire π. La méthode des polygones inscrits et circonscrits est l'occasion de calculer un au rang suivant n+1. Le cercle (C) de centre O et de rayon 1 a pour aire π. La méthode des polygones inscrits et circonscrits est l'occasion de calculer un encadrement de ce réel.. On inscrit dans (C) un carré de côté $\sqrt{2}$; et soit le carré circonscrit dont les côtés sont parallèles au précédent, voir fig1 ci-dessus.
A l'étape suivante, on inscrit l'octogone régulier dont les sommets sont alternative ment sur le premier carré et au milieu de chaque côté du second (fig8 et fig9). Ainsi, à chaque étape, on multiplie par 2 le nombre des côtés des polygones inscrits et circonscrits.
Pour les nièmes polygones on pose :

Polygone inscrit	Polygone circonscrit
$c_n\,;a_n\,;s_n$	$c'_n\,;1;S_n$

respectivement pour mesure du côté , de l'apothème , et de l'aire du polygone à 4.2^n côtés.

1°question

Démontrer les relations suivantes : $a_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $s_1 = 2$; $S_1 = 4$

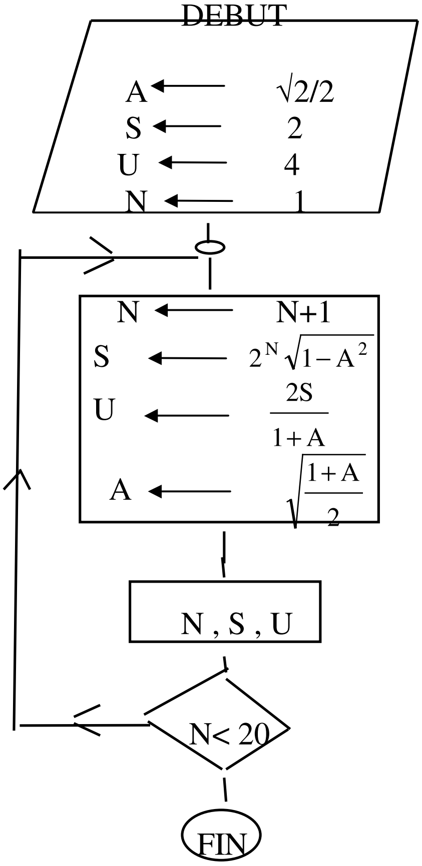
2°question

Démontrer par récurrence sur l'entier n, les relations suivantes:

$$\forall n \in N^* \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}} \quad (1) \qquad s_{n+1} = 2^{n+1}\sqrt{1-a_n{}^2} \quad (2) \qquad S_{n+1} = \frac{s_{n+1}}{a_n{}^2} = \frac{2s_{n+1}}{1+a_n} \quad (3)$$

[21] Ce travail avait déjà été réalisé par Archimède avec un succès remarquable. IL était déjà enseigné sous cette forme en Terminale au début du siècle (Voir l'ouvrage scolaire de F.G.M. édité chez Mame en 1911). Evidemment, sans calculatrice, les élèves utilisaient alors les tables de logarithmes décimaux pour réaliser cette algorithme.

§2.2 Stade du calcul



Programme sur TI81, par exemple: AIRE du disque

: DISP"A , S , U , N"
: DISP A :DISP S : DISP U : DISP N

: LBL 0

: N+1 $\longrightarrow$ N
: $2^n\sqrt{1-A^2} \longrightarrow$ S
: $\frac{2S}{1+A} \longrightarrow$ U
: $\sqrt{\frac{1+A}{2}} \longrightarrow$ A

: DISP N
: DISP S
: DISP U
: PAUSE
: IF N<20
: GOTO 0
:END

Je donne le programme sur une calculatrice très simple et dépassée actuellement pour bien monter que c'est l'introduction de ces outils qui permet ces calculs et ces conjectures.

Dans cet organigramme A reçoit a l'apothème, S reçoit l'aire du polygone inscrit, U reçoit l'aire du polygone circonscrit, enfin N reçoit n le nombre d'étapes ou le numéro des polygones.

1°question. Avec l'aide de cet organigramme, établir sur votre calculatrice le programme permettant de calculer , terme à terme, les élements des suites:
(s_n) et (S_n); lorsque n varie de 1 à 20.

2°question Parmi les relations (1), (2) ou (3) quelle est celle qui est la cause, à partir d'un certain rangn_0, de l'incohérence des résultats donnés par la calculatrice? justifier votre réponse.

3°question Pour $n < n_0$, donner un encadrement du réel π, avec la précision maximum autorisée par votre machine.[22]

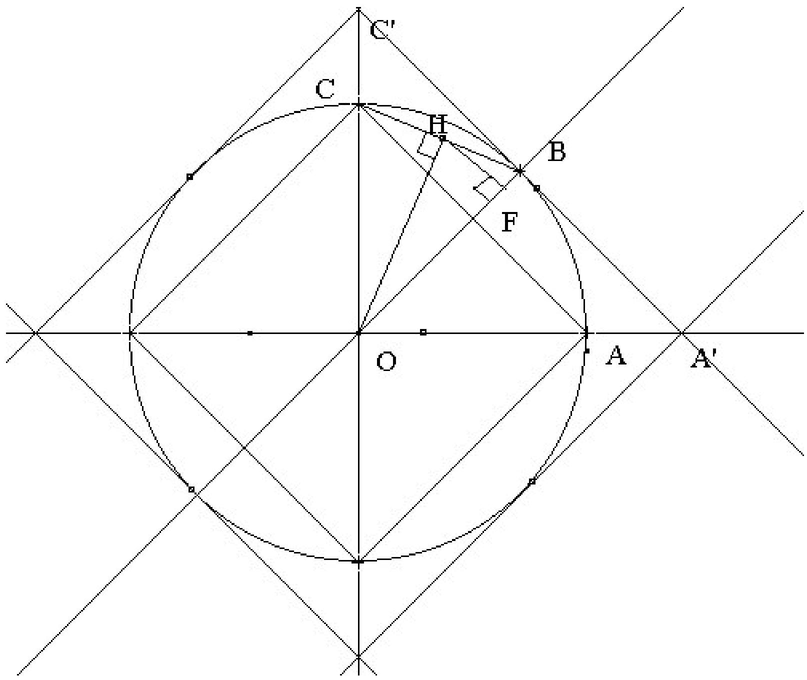
REMARQUE.

L'échec relatif, au plan du calcul, est ici intéressant. En effet, le résultat étant connu; à savoir π, la méthode théorique ne pouvant être mise en cause, l'élève constate les limites de sa machine. Le savoir-faire sur une calculatrice est insuffisant, le savoir mathématique reste dons prédominant pour une utilisation raisonnée de cet outil. Cette "leçon" est capitale pour l'attitude de notre élève au regard des matériels toujours plus performants qu'on lui propose. Enfin se pose le problème d'une approche algorithmique de π par un procédé plus adapté ; par exemple le calcul approché de $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$ par la méthode du point médian au chapitre suivant du travail sur l'intégrale. Je n'évoque pas ici la formalisation qui consisteraient à

[22] Voir éléments de solution du T.P. en Annexe 8.

démontrer que les suites (S_N) et (s_n) sont adjacentes, en effet, pour avoir essayé, avec les élèves de terminale, "ça ne marche pas", la complexité des calculs est trop grande.

Fig 8



I est milieu de [AB], Kest milieu de [AJ]

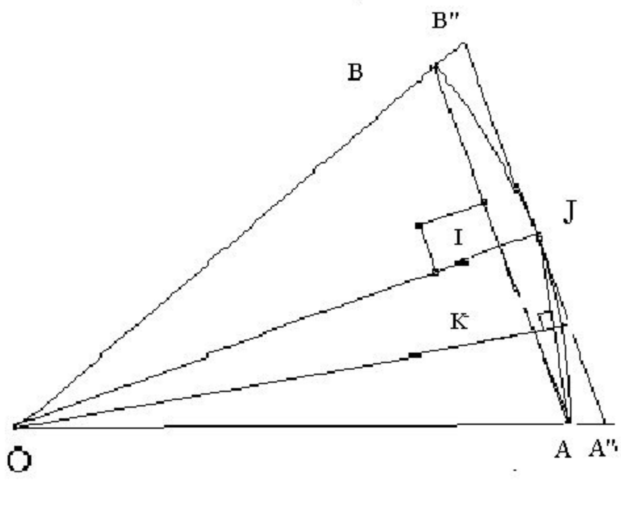


fig 9 :

2°PARTIE

DEFINITION DE L'INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN INTERVALLE [a,b].

I PROBLEMATIQUE EN TERMINALE..

Il est intuitivement évident, pour l'élève, que le domaine sous la courbe admet une aire. Si on désire passer au stade de la rigueur, pourquoi faut-il admettre en T.S. que le domaine curviligne sous la courbe représentative de f admet une aire au sens établi au Chap1 C? Tout simplement parce que le moyen rigoureux "le plus rapide " pour le prouver nécessite l'intégrale de Riemann. Pour illustrer ceci, rappelons brièvement le traitement de ces questions après le Bac.

a) Définition de l'intégrale simple après la terminale.(un plan sommaire)

Soit (d) une subdivision $(x_i)_{0\le i\le n}$ de [a,b]. Les sommes de Darboux

sont: $s(d)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})m_i$ et $S(d)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})M_i$;

M_i et m_i sont les bornes atteintes par f sur $[x_i, x_{i-1}]$ en $x_i^{'}$ et $x_i^{''}$.

.

Donc $S(d)-s(d)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})(M_i-m_i)$. Dans ce rapide survol, passons sur la définition de l'intégrale au sens de Riemann, énonçons un critère d'intégrabilité sur les sommes de Darboux : f continue sur [a,b] est intégrable si , quel que soit le réel positif ε, il existe au moins une subdivision (d) telle que : $|S(d)-s(d)|<\varepsilon$.

Or si f est continue sur un segment, elle y est <u>uniformément continue</u>,

et $\forall\varepsilon>0$, $\exists\eta<0$, x' et $x''\in[a,b]$; ($|x'-x''|<\eta \Rightarrow |f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$).

Soit (d) une telle subdivision de [a,b] dont le module est $<\eta$;

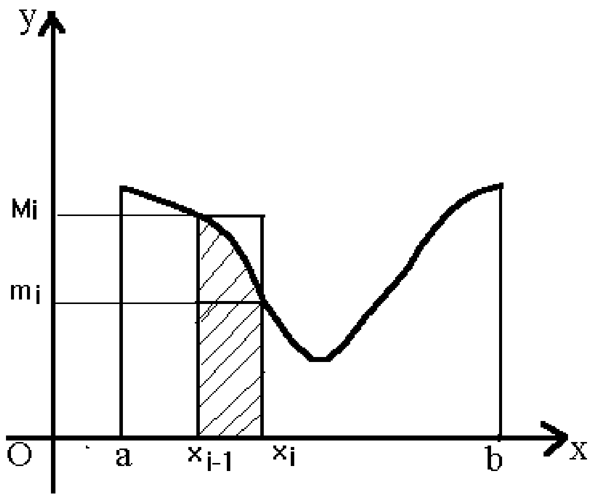
$\forall\varepsilon>0$, $\exists\eta<0$, x' et $x''\in[a,b]$; ($|x'-x''|<\eta \Rightarrow |f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$)

$|x_i^{'}-x_i^{''}|\le|x_i-x_{i-1}|<\eta$; $M_i-m_i<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$; $0\le|S(d)-s(d)|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=\varepsilon$

Les ensembles de nombres S(d) et s(d), adjacents, ont même borne notée $I=\int_a^b f(x)dx$.

b) Interprétation géométrique du résultat en termes d'aire

Fig10



$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})M_i = S(d)$ et $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})m_i$ *-= s(d) sont respectivement les aires d'un polygone contenant le domaine courbe et d'un polygone inclus dans ce domaine sous la courbe. Les polygones sont ici la réunion des rectangles qui contiennent Δ et la réunion de ceux inclus dans Δ.Ainsi, lorsque f est intégrable, ce sont des sommes de Darboux adjacentes; elles convergent vers le nombre $I = \int_a^b f(x)dx$. D'après la condition donnée par H.Lebesgue (chapI,C,§1 le corollaire) le domaine sous la courbe admet donc une aire, qui plus est, égale à ce nombre I.

Conclusion.

Au lycée la continuité uniforme est résolument hors programme, nous admettrons donc que le domaine Δ sous la courbe admet une aire lorsque f est continue et positive sur le segment [a,b]. L'objectif à atteindre est donc de choisir une définition provisoire de l'intégrale qui réponde aux deux conditions :

a) donner une certaine épaisseur sémantique à la notion d'intégrale, qui perdure après le baccalauréat et permette des reconstructions aisées. C'est la recherche du sens.

b) Poser une définition qui apporte un concept nouveau dont l'utilité soit immédiatement perceptible et en relation avec le problème de la mesure , qui lui est déjà familier pour beaucoup de grandeurs.

c) Enfin disposer d'une définition qui permette, dans le cas des fonctions continues et monotones d'établir, par l'exposé de quelques séquences déductives, une certaine rationalité dans le cours d'Analyse.

Pour les raisons déjà indiquées, lors de la partie I dans l'introduction sous le titre "argumentons", la définition de l'intégrale comme étant l'aire sous la courbe convient à ces exigences. Il faut cependant bien préciser ce qui peut être dit sur l'aire en terminale pour que la définition soit mathématiquement correcte ; ce qui nous conduit à poser les axiomes des domaines quarrables et admettre que l'aire sous une courbe continue existe. .

II DEFINITION DE L'INTEGRALE EN TERMINALE. (COURS)

§.1 Propriétés intuitives ou axiomes de l'aire

Nous admettrons les propriétés suivantes: a) Si X et Y sont deux domaines disjoints admettant une aire , alors $X \cup Y$ a une aire, et Aire($X \cup Y$) = Aire(X) + Aire(Y).

b) Si X et Y ont une aire et $X \subset Y$ alors Aire(X) $\leq$ Aire(Y)

c) Tout rectangle R a une aire. Une unité d'aire étant choisie, c'est l'aire du carré de côté 1; si a et b sont les dimensions du rectangle, son aire est ab.

Propriété admise en T.S. Si f est continue et positive sur[a,b], alors le domaine Δ défini par: $M(x,y) \in \Delta \quad \Leftrightarrow \quad a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$ admet une aire.

Remarques : "Les segments et les domaines réduits à un point ont une aire" est une conséquence de la propriété c). Notons aussi, comme conséquence de ces trois propriétés, que des domaines admettant une aire et isométriques ont même aire.

§2 Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive en Terminale

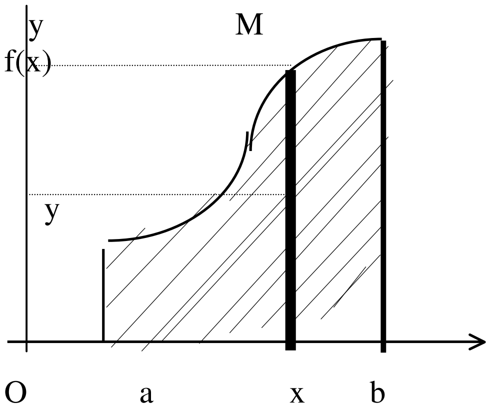


Fig11

Définition 1. Soit la fonction f, continue et positive sur [a,b] (a < b) et Cf sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$du plan. On appelle intégrale de f de a à b, et on note $\int_a^b f(x)dx$, l'aire du domaine plan Δ compris entre la courbe, l'axe x'Ox et les droites x = a et x = b. On note :

Aire(Δ) = $\int_a^b f(x)dx$ unités d'aire ; l 'unité d'aire étant celle du carré de côté un.

On lira: "somme de a à b de f(x)dx". Dans cette notation le produit f(x)dx rappelle l'aire d'un "petit rectangle" de largeur dx et de longueur f(x), le symbole $\int$ signifie la somme de ces rectangles, après passage à la limite comme on l'a vu dans l'ACTIVITE dans la1° partie du présent chapitre I(B II).

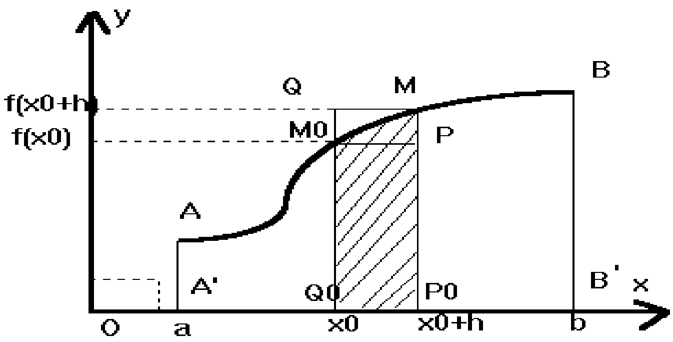
Pour l'instant, on peut écrire: $\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$. Les aires des rectangles étant connues, on peut aussi écrire: $\int_a^b kdx = k(b-a)$, où k est une constante réelle sur [a,b]; $\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$, l'aire du triangle étant connue également. Le problème est désormais de calculer les intégrales par un moyen plus pertinent, qui n'implique pas systématiquement le calcul préalable d'une aire, ce fut l'oeuvre des plus grands comme Leibniz et Newton.

REMARQUE : le nombre $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire de Δ dans l'unité d'aire qui est celle du carré de côté 1 construit dans le repère orthonormé fixé dans la définition.

On notera A(Δ) = $\int_a^b f(x)dx$ unités d'aire.

§3 Intégrales et primitives.

Soit donc f continue positive et monotone , par exemple croissante sur [a,b].
fig12



Pour $x_0 \in [a,b]$ on note $A(x_0)$ l'aire du domaine Δ_0 tel que:

$$M(x,y) \in \Delta_0 \Leftrightarrow a \le x \le x_0 \text{ et } 0 \le y \le f(x)$$

Ce domaine, sur la figure ci-dessus, est limité par la courbe Cf, Ox, et les droites (A'A) et (Q_0M_0). Nous avons admis que son aire existe et c'est par éfinition: $A(x_0) = \int_a^{x_0} f(x)dx$

Si x_0 subit un accroissement positif $x_0 + h$, la figure 12 montre une conséquence de la monotonie de f : l'accroissement correspondant d'aire sous la courbe (la partie hachurée) est encadré par les aires des deux rectangles $M_0Q_0P_0P$ et QQ_0P_0M, puisque ici f est croissante.
Traduisons ces propriétés géométriques en termes de fonctions et d'inégalités.
Supposons $x_0 \in]a,b[$ et $h > 0$ tel que $x_0 + h \in [a,b]$, $A(x_0+h) - A(x_0)$ est l'aire du domaine hachuré ci-dessus. Les axiomes du §1 entraînent pour les aires des rectangles cités:

$$hf(x_0) \le A(x_0+h) - A(x_0) \le hf(x_0+h)$$

$$f(x_0) \le \frac{A(x_0+h) - A(x_0)}{h} \le f(x_0+h)$$

Puisque f est continue sur [a,b], en particulier en x_0, le passage à la limite et "le théorème de gendarmes" appliqués à la seconde inégalité donnent:

$$\lim_{h\to 0^+} f(x_0+h) = f(x_0) \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{A(x_0+h) - A(x_0)}{h} = f(x_0)(1)$$

De façon analogue on démontre : $\lim_{h\to 0^-} \frac{A(x_0+h) - A(x_0)}{h} = f(x_0)$ (2)

Les relations (1) et (2) signifient que A est dérivable en x_0 et que $A'(x_0) = f(x_0)$
On démontre de même que : $A'(a) = f(a)$ et $A'(b) = f(b)$. Ainsi la fonction A est dérivable sur [a,b] et A' = f. C'est à dire : $\forall x \in [a,b]$ $(\int_a^x f(t)dt)' = f(x)$. Donc la fonction $x \to \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur [a,b], celle qui s'annule en a. La fonction f admet donc des primitives sur [a,b]. Si F est une primitive quelconque de f sur [a,b] alors : $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$; pour $x = a$, $C = -f(a)$; si $x = b$, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Théorème 1. Si f est continue, positive et croissante sur [a,b] ; alors la fonction $x \to \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur [a,b] qui s'annule en a. Si F est une primitive quelconque de f sur [a,b] alors $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

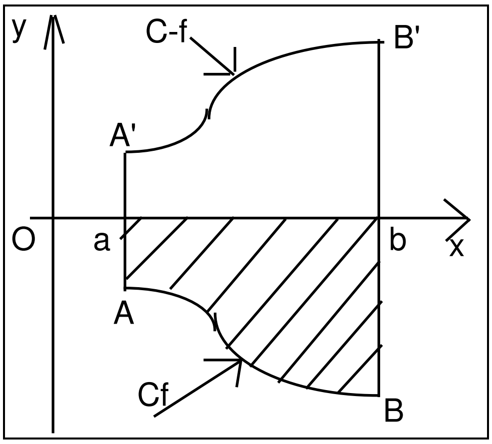
Ce résultat essentiel permet de ramener les calculs d'aires à celui des primitives.
En terminale, c'est uniquement par lecture inverse du tableau des dérivées que l'on atteindra les primitives. Ceci limite considérablement son efficacité; c'est une bonne raison pour introduire le plus tôt possible les méthodes simples de calcul approchés d'intégrales (méthodes des rectangles, des trapèzes, ou du point médian, et peut-être celle de Simpson comme barycentre des deux précédentes).
REMARQUE. Il est nécessaire d'insister sur le fait que ce Théorème 1 n'a pu être démontré qu'en admettant le travail le plus difficile : " l'aire sous la courbe existe". Dans cette séquence déductive, développée en TS, la cohérence existe; mais bien entendu dans sa formation ultérieure, l'étudiant sera "replacé" devant le problème de l'intégrale de Riemann. Cette démarche est comparable à celle qui consiste à admettre en DEUG le théorème de d'Alembert, également signifiant pour l'étudiant, pour le démontrer en Licence.
Dans la suite de l'essai, nous nous posons la question: "Peut-on donner un sens géométrique, en termes d'aire à F(b) -F(a) lorsque f est continue sur [a,b] (a<b) mais ne gardant pas nécessairement un signe constant? Puis ensuite si a > b? Pour cela il faut savoir si f, continue, admet des primitives lorsqu'elle ne garde pas un signe constant sur [a,b]. Pour des raisons liées à la terminale (ne pas lasser par un exposé uniquement guidé par un recherche de rigueur) nous admettrons le théorème suivant:

Théorème2 Toute fonction continue sur un intervalle I de R admet des primitives sur I.

§4 Généralisation de la définition de l'intégrale d'une fonction continue de signe quelconque; les réels a et b également quelconques.

Si f ne garde pas un signe constant sur [a,b], que représente le réel F(b)-F(a)?

Fig 13



1°cas: $a < b$ et $\mathbf{f(x) \leq 0}$ **sur** $\mathbf{[a,b]}$

Posons $f_1 = -f$ et appellons Δ et Δ_1 les domaines limités respectivement par Cf et Cf_1. Ils sont isométriques, donc ont même aire: $A(\Delta) = A(\Delta_1) = \int_a^b -f(x)dx$, puisque -f est positive sur [a,b]. Si F est une primitive de f, -F est une primitive de -f; donc, en application du théorème1, $A(\Delta_1) = -F(b) - (-F(a)) = F(a) - F(b) = A(\Delta)$

Ainsi $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -\text{aire de } \Delta$

Théorème définition 3 Soit f continue et négative sur [a,b] (a < b), alors l'aire du domaine plan Δ compris entre Cf, l'axe x'Ox et les droites x = a et x = b est égale à $\int_a^b -f(x)dx$. On pose par définition $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b (-f(x))dx$ On dira que $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire algébrique de Δ ; elle est ici négative.

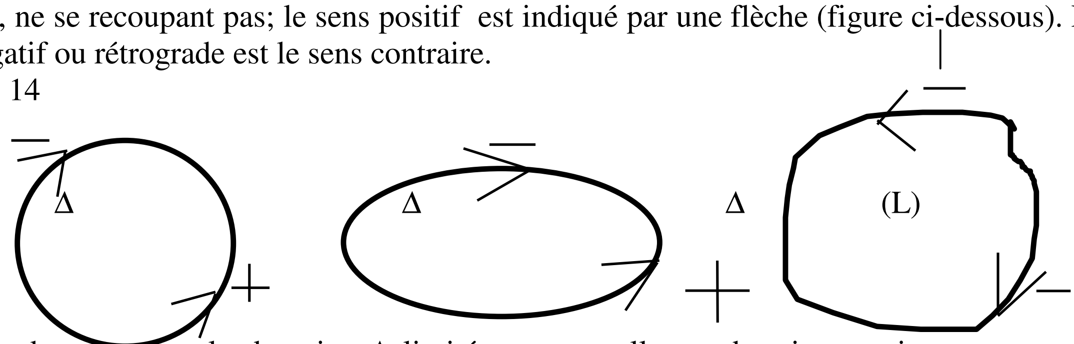
2° cas (a < b) et f est de signe quelconque sur [a,b].
On suppose que f change de signe un nombre fini de fois en c, d, e et g. On note alors :
On a : F(b)-F(a)=[F(b)-F(g)]+[F(g)-F(e)]+[F(e)-F(d)]+[F(d)-F(c)+[F(c)-F(a)].
Utilisons le th 2; il vient F(b)-F(a)=aire Δ_1 − aire Δ_2 + aire Δ_3 − aire Δ_4 + aireΔ_5;

où Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 , Δ_4 et Δ_5 sont les domaines plans limités par Cf et respectivement les segments [a,c] , [c,d] , [d,e] , [e,g] et[g,b]. Sur chacun des segments, f garde un signe constant, et les théorèmes donnent: $F(b) - F(a) = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^e f(x)dx + \int_e^b f(x)dx$. Ce qui donne un sens, en terme d'intégrale, donc d'aires algébriques, à F(b)-F(a).

$\int_a^b f(x)dx$ est la somme des aires algébriques limitées par Δ

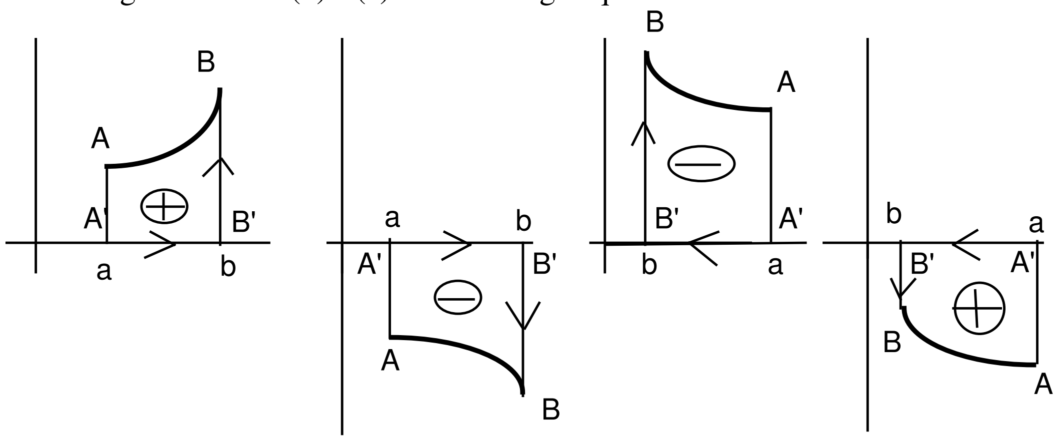
3°cas: f est continue sur [a,b] (a > b) et f de signe quelconque sur [a,b]. a) Contours orientés. Considérons le plan orienté: le sens positif étant le sens trigonométrique direct. Tout cercle est orienté, mais également toute courbe plane fermée (L), ne se recoupant pas; le sens positif est indiqué par une flèche (figure ci-dessous). Le sens négatif ou rétrograde est le sens contraire.

Fig 14



En admettant que le domaine Δ limité par une telle courbe ait une aire : on appelle aire algébrique du domaine Δ, limité par une courbe orientée, le nombre réel dont la valeur absolue est l'aire de Δ, et dont le signe est + ou - selon que la courbe (L) est orientée dans le sens positif ou négatif.

b) Supposons que la fonction f soit continue et de signe constant sur [a,b].Que signifie alors F(b)-F(a) ? On distingue quatre cas:



a < b et f(x) > 0 a < b et f(x) < 0 b < a et f(x) > 0 b < a et f(x)<0

fig 15

Nous conviendrons que le domaine Δ limité par la courbe Cf, l'axe x'Ox et les droites (x = a) et (x = b) est orienté positivement si le contour A'B'BA est parcouru dans le sens positif défini ci-dessus ; le domaine sera orienté négativement si le contour A'B'BA est parcouru dans le sens négatif. Ainsi, sur la figure ci-dessus, les quatre aires algébriques ont le signe indiqué.

Si on désigne par S et $\overline{S}$ respectivement l'aire arithmétique et l'aire algébrique de Δ ; alors F(b)-F(a) est égale respectivement dans les cas ci-dessus à :

$[F(x)]_a^b = S = \overline{S}$; $[F(x)]_a^b = -S = \overline{S}$; $[F(x)]_a^b = -S = \overline{S}$; $[F(x)]_a^b = S = \overline{S}$

c) Si f est continue et de signe quelconque sur [a,b], alors comme précédemment, F(b)-F(a) est la somme des aires algébriques des domaines sur lesquels f(x) garde un signe constant. D'où le théorème:

Théorème définition 4. Si f est continue sur [a,b], a et b quelconques, et change de signe en un nombre fini de points c, d, et e, alors par définition:
$F(b)-F(a)=\int_a^c f(x)dx+\int_c^d f(x)dx+\int_d^e f(x)dx+\int_e^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$. Chaque terme de cette somme étant une aire algébrique définie comme ci-dessus.
Ainsi $\int_a^b f(x)dx$ est la somme des aires algébriques des domaines limités par Cf dans un repère orthonormé du plan.

§5 Propriétés immédiates.

P1 : Si f est continue sur [a,b], $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

P2 : Si f est continue et impaire sur [-a,a], alors $\int_{-a}^a f(x)dx=0$

P3 : Si f est continue et paire sur [-a,a], alors $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

La définition de l'intégrale en terme d'aire et les théorèmes 1,2 et 3 et 4 rendent évidents P1, P2 et P3. Puisque désormais, $\int_a^b f(x)dx$ a pour nous un sens si f est continue sur [a,b] :

- C'est la somme des aires algébriques des domaines orientés limités par Cf, l'axe x'Ox et les droites x=a et x=b ; avec les conventions posées sur le signe des aires. Attention, les propriétés intuitives de l'aire telles que nous les avons posées pour les domaines "géométriques" (au chapitre1, C), ne sont évidemment plus vraies pour les domaines orientés.
- C'est le réel F(b)-F(a) ; interprétation fondamentale ici. On peut donc énoncer

Théorème définition 5. Si f est continue sur le segment [a,b], Cf sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\Re(O,\vec{i},\vec{j})$du plan, et F une primitive de f sur [a,b], on appelle intégrale de f de a à b la somme des " aires algébriques" limitées par la courbe x'Ox et les droites x=a et x=b; on note $\int_a^b f(x)dx$. De plus $\int_a^b f(x)dx$ = F(b)-F(a).

Si f est continue sur un intervalle I de R, alors pour a quelconque de I, on a
:$\forall x\in I \quad \int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$. Ainsi on peut énoncer :

Théorème 6. Soit f, continue sur un intervalle I de R;$a\in I$, la fonction définie sur I par : $x\to\int_a^x f(t)dt=G(x)$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a. Soit:
$\forall x\in I \quad (\int_a^x f(t)dt)'=f(x)$ et $G(a)=0$.

Ceci permet de définir de nouvelles fonctions à partir de f, lorsque les primitives de f ne sont pas des fonctions usuelles. Citons l'exemple classique en terminale:

$$\forall x\in]0,+\infty[\quad \int_1^x \frac{1}{t}dt=\ln x \Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[\quad (\ln x)'=\frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \ln 1=0$$

Dans le contexte de cette définition de l'intégrale il y a intérêt, en TS à définir la fonction logarithme népérien comme l'intégrale ci-dessus. Car c'est aussi une aire algébrique, ce qui facilite un calcul approché de tout réel lnb, b > 0; via la méthode des rectangles vue au chapitre 1. De même cette définition permet une démonstration très accessible aux élèves de toutes les propriétés de cette nouvelle fonction.

ANNEXE 8
Eléments de solution de 1 'ACTIVITE A (calcul par Archimède)

$$f'(x) = 2ax \text{ donc } 2a\beta = \frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha} = a\frac{(\gamma^2-\alpha^2)}{\gamma-\alpha} = a(\gamma+\alpha);\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$$

β est l'abscisse de D ; donc (BD) parallèle à y'Oy .

2°Question

le parallélogramme ACC'A implique : aireABC < Σ < 2aireABC ; 0 < Σ -aireABC < aireABC
D'où le lemme1 .

Duplication

1°Question

a)D est milieu de [AC] ; $B \in P$, $DB = y_B - y_D = a\frac{(\alpha+\gamma)^2}{4} - a\frac{(\alpha^2+\gamma^2)}{2}$;

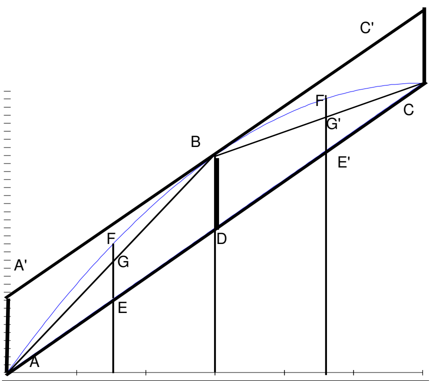
$DB = -\frac{a}{4}(\alpha-\gamma)^2$ Ce résultat, relatif à la corde [AC] , donne de même pour la corde [AB] :

$GF = -\frac{a}{4}(\alpha - \frac{\gamma+\alpha}{2})^2 = -\frac{a}{4}\frac{(\alpha-\gamma)^2}{4}$; $GF = \frac{1}{4}DB$.

b) aireAFB = 2aireAFG = 2FG(h/2/2) =FG(h/2)
=1/4DB(h/2)=1/4aireADB
De même aireBF'B=1/4aireDBC
Donc aire des « tri.ajoutés »=
1/4aireABC.

2°Question_ Soit P_1= AFBF'C, le polygone inscrit et S_1 son aire.s_1 et T_1 l'aire respective des 4 segments restants et des triangles ajoutés.

$S_1 < \Sigma$; $S_1 + s_1 = \Sigma$; $T = \frac{1}{4}$ $\qquad$ $S_1 = 1 + \frac{1}{4}$; $\Sigma - S_1 < \frac{1}{4}$



ANNEXE 9 Eléments de solution du T.P du C (2° partie du chapitre)

1 Stade du dessin : sur la fig 5 : $a_1 = OH = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $s_1 = AC^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$.

L'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{a_1} = \sqrt{2}$, transforme le carré inscrit en carré circonscrit, donc$S_1 = 2.2 = 4$. La suite (a_n) est connue par a_1 seulement, considérons la figure au rang n+1 en s'inspirant de la figure6. Dans le triangle OIC (fig6) rectangle en I, F est le milieu de [HB],$OI^2 = OB.OF = 1.(\frac{OB+OH}{2})$.Donc pour l'apothème :$a_{n+1}^2 = \frac{1+a_n}{2}$. (1)

Dans les triangles rectangles OIA et IJA, on a:

$\frac{c_n^2}{4} + a_n^2 = 1$ et $(a_n - 1)^2 + \frac{c_n^2}{4} = c_{n+1}^2$ donc $c_{n+1}^2 = (1 - a_n)^2 + 1 - a_n^2 = 2(1 - a_n)$

. L'aire de OJA est donc: $\frac{1}{2} a_{n+1}.c_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{2(1-a_n)}.\sqrt{\frac{1+a_n}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{1-a_n^2}$

- Au rang 1, il y a 2^2 triangles isométriques dont la somme des aires est s_1
- Au rang 2 , il y en a 2 fois plus, $2.2^2 = 2^3$
- Au rang n+1, il yen a $2.2^{n+1} = 2^{n+2}$, donc $s_{n+1} = 2^{n+2}\frac{1}{2}\sqrt{1-a_n^2} = 2^{n+1}\sqrt{1-a_n^2}$

Au rang n+1, on passe de l'inscrit au circonscrit par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{a_{n+1}}$ donc $S_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}^2} s_{n+1} = \frac{2s_{n+1}}{1+a_n}$.

2 Stade du calcul (sur TI 80 ou 81) n	s_n		S_n	n		
1	2		4	21	2,9658	2,9658
2	2,828		3,313	22	2,2488	2,2488
3	3,061		3,182	23	0	0
4	3,1214		3,1517	24	0	0
5	3,136548		3,144118	25	0	0
6	3,140331		3,142223			
7	3,141277		3,141750			
8	3,1415138		3,141632			
9	3,141572939		3,141602509			
10	3,141587692		3,1415595084			
11	3,14159128		3,141593128			
12	3,141591681		3,141592143			
13	3,141593016		3,141593131			
14	3,141586607		3,141586636			
15	3,141560973		3,141560981			
20	**3,145728**		**3,145728**			

Question 2 : A partir de n=10, la suite (s_n) n'est plus majorée par (S_N) ; donc $n_0 = 9$.

Le produit $s_n = 2^n\sqrt{1-a_n^2}$ est tel que $\sqrt{1-a_n^2}$ converge rapidement vers 0, et à partir d'un certain rang la calculatrice arrondit à 10^{-12}, puis à 0, à partir de n=23.

Conclusion : $3{,}1415 \le \pi \le 3{,}1416$.