CHAPITRE V III

CALCULS APPROCHES DES INTEGRALES

.

PRESENTATION

Les calculatrices programmables et graphiques sont devenues un outil familier de l'élève, et bien que leur utilisation soit encore problématique lors des examens ou des contrôles des connaissances[1], elles constituent désormais une aide dont il n'est pas question de se priver. Les textes des programmes officiels de terminale scientifique sont explicites à cet égard puisqu'ils conseillent de dégager les séquences, les tests et les boucles ; ils supposent ainsi un apprentissage élémentaire de la programmation sur ces machines. Presque toutes ces calculatrices dites " type Baccalauréat " donnent des valeurs approchées des intégrales des fonctions continues, en utilisant un logiciel souvent basé sur la plus performante des méthodes: celle de Simpson. Faut-il pour autant, en classe de terminale (spécialité math), réduire le calcul approché des intégrales à un simple survol de recettes, sous le prétexte que la machine fait le travail? Je ne crois pas.

Le futur scientifique ne peut pas être un utilisateur ou un consommateur λ de calculatrice: il doit pouvoir donner du sens, dans les cas simples, à certains des logiciels contenus dans les calculatrices. Sinon le risque est grand que l'objet devienne mythique pour lui, et de plus il sera incapable de le contrôler en cas de difficulté.

L'élève qui se destine à des études scientifiques où les Mathématiques jouent un rôle important, à le droit au "savoir" fut-il élémentaire : pourquoi telle méthode est-elle plus performante qu'une autre ? qu'apporte le calcul d'un majorant des erreurs ? que signifierait un calcul approché sans contrôle des erreurs ? pourquoi et comment intervient le degré du polynôme d'interpolation (0 pour les rectangle, 1 pour les trapèzes ou le point médian, 2 pour Simpson) dans la performance de la méthode ?

L'étude de la méthode des rectangles présente des apports théoriques qui se prêtent à une séquence déductive lorsque la fonction est continue et monotone. Elle permet de démontrer de nouveaux résultats sur les suites et les intégrales. Il est désormais possible de calculer les limites de certaines suites (en fait des sommes de Riemann) comme intégrales ou inversement, c'est aussi l'occasion de souligner la cohérence de l'enseignement de l'Analyse en TS. Pour résumer, si par manque de temps une seule méthode doit être étudiée, c'est bien celle-ci.

Ceci posé, pour le traitement de ce chapitre, je procède selon le triptyque usuel dans ce texte : des activités préparatoires et des travaux pratiques proposés en exercices, et" le cours ", mise au point essentielle, non seulement pour fixer les "savoirs" mais aussi pour "démontrer ", donner les raisons des propriétés, lorsque cela est possible au lycée. Cela se traduit dans la pratique par trois phases :

a) la phase du dessin, du graphique. Je propose d'étudier les variations et de tracer le graphe des trois fonctions dont on calculera des valeurs approchées des intégrales, à savoir:

$$u\begin{cases}[1,2] \to R \\ x \;\to \dfrac{1}{x}\end{cases} \qquad v\begin{cases}[0,1] \to R \\ x \;\to e^{-x^2}\end{cases} \qquad w\begin{cases}[0,1] \to R \\ x \;\to \dfrac{4}{1+x^2}\end{cases}$$

Les intégrales de u, v et w mesurent, par définition (voir chapitre II), les aires.

b) la phase du calcul**.** Elle consiste en un exposé succinct de la méthode (les rectangles, le point médian, les trapèzes et puis Simpson en annexe). Un organigramme est proposé pour que l'élève réalise sur sa calculatrice le programme correspondant à chaque

[1] Faut-il autoriser aux examens des outils qui accomplissent toutes les tâches, font du calcul formel (dérivées, primitives...) libérant totalement l'élève de toute mémorisation et parfois de recherche du sens , nécessitant des épreuves d'un type nouveau, soumis au progrès exponentiel de ces machines. Autant de questions auxquelles il faudra répondre un jour.

méthode. Bien entendu, la démarche est plus riche si l'élève propose son propre programme. Enfin, les résultats des calculs sont classés, pour une même intégrale, selon n le nombre de subdivisions et la méthode utilisée; ce qui permet à l'élève d'énoncer des conjectures sur les performances respectives des différents procédés.

c) La phase de formalisation**.** Il faut contrôler les intuitions apportées par les étapes précédentes. Pourquoi la méthode du point médian semble plus rapide que celle des rectangles ? Pour cela, le calcul des majorants des erreurs est nécessaire; il s'appuie ici essentiellement sur l'inégalité des accroissements finis[2], à la suite d'une interprétation géométrique de cette propriété lors de la méthode des rectangles. Je reste attaché, dans cette recherche, au rôle que doit avoir la géométrie dans la démonstration de propriété de l'Analyse élémentaire au Lycée. Il sera alors "naturel" d'essayer cette inégalité pour les autres méthodes de calculs approchés. C'est le contrôle théorique des conjectures avancées à la phase précédente. Cette dernière étape apporte la rigueur nécessaire à un enseignement scientifique à ce niveau. Sont ainsi mis en évidence dans les majorants trouvés le rôle des facteurs en jeu: n le nombre de subdivisions et d le degré des polynômes d'interpolation.

On peut penser sur un sujet si courant: voici le nième exposé. Précisons que cet essai pédagogique trouve son originalité sur les deux points essentiels suivants :

a) le calcul d'un majorant des erreurs est rendu accessible aux élèves de TS par une **interprétation géométrique de l'inégalité des accroissements finis**[3] pour la méthodes des rectangles et généralisable à la méthode du point médian.
b) l'interprétation de ces majorants permet de **" prouver**" la pertinence relative de ces différentes méthodes.

Pour conclure, l'expérience montre qu'on ne peut être exhaustif sur la question en TS ; il suffirait je pense de traiter la méthode des rectangles et du point médian pour obtenir des résultats significatifs dans l'esprit décrit ci-dessus.

---

[2] Notons que cette utilisation ajoute à la cohérence de notre travail, puisque nous avons démontré cette inégalité au chapitre V

[3] souvent réservée à l'unique usage de la convergence des suites récurrentes.

A LA METHODE DES RECTANGLES

I PROBLEMATIQUE SUR TROIS EXEMPLES

ENONCE[4]

: Soit les fonctions u, v et w définies par:

$$u\begin{cases}[1,2]\to R\\ x \;\to \dfrac{1}{x}\end{cases}\qquad v\begin{cases}[0,1]\to R\\ x \;\to e^{-x^2}\end{cases}\qquad w\begin{cases}[0,1]\to R\\ x \;\to \dfrac{4}{1+x^2}\end{cases}$$

1° Question Etudier les variations et tracer leurs graphes respectifs dans trois repères orthonormés distincts. (unité graphique: 10 cm). Préciser les tangentes aux points remarquables de ces courbes.

2° Question Soient u ', v ' et w ' les fonctions dérivées de u, v et w.

Rappelons que si une fonction f est dérivable sur [a,b], et sa dérivée f 'continue sur [a,b], alors $|f'(x)|$ est aussi continue sur [a,b], car composée de deux fonctions continues. Alors, le théorème admis en TS, permet d'affirmer qu'elle atteint ses bornes (ou l'image d'un segment par une fonction continue est un segment), donc :$\exists c \in [a,b]$ tel que $|f'(c)| = M_1$. Soit, si $a \le x \le b$ alors $|f'(x)| \le M_1$

Par définition, nous poserons $M_1 = \underset{x\in[a,b]}{\mathrm{Sup}}|f'(x)|$. Calculer M_1 pour chacune des trois fonctions u, v et w définies ci-dessus.

3° problématique

Hachurer, sur chacun des graphes, les domaines dont les aires, en unité d'aire, sont les nombres:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \quad , \quad \int_0^1 e^{-x^2}dx \;\text{ et }\; \int_0^1 \frac{4dx}{1+x^2}.$$

L'objectif de l'étude qui suit est de calculer des valeurs approchées de ces intégrales par la méthode des rectangles (déjà abordée au chap I, lors de la quadrature du segment de parabole par B.Pascal). En TS, nous savons que $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$, les résultats approchés nous permettrons d'encadrer ln2 et d'évaluer l'efficacité de cette méthode. Les primitives des fonctions continues v et w ne sont pas connues (pour w, notons que Arctanx n'est pas défini en terminale.), donc le calcul approché prend ici tout son sens. On peut aussi faire remarquer, par les calculs, que $4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ est voisin de π, et construire un exercice qui prouve l'égalité; nous aurons ainsi un moyen d'approcher le réel π [5], de l'encadrer. Les deux encadrements ci-dessus sont au coeur du champ de l'Analyse en terminale.

---

[4] Dans tout le texte qui suit , pour une plus grande clarté, j'encadre tout énoncé ou définition ou théorème soumis à l'attention des élèves.

[5] Cet exercice sera revu après l'exposé de méthodes plus performantes, où l'approche de π devient intéressante.

II EXPOSE DE LA METHODE (Cours)

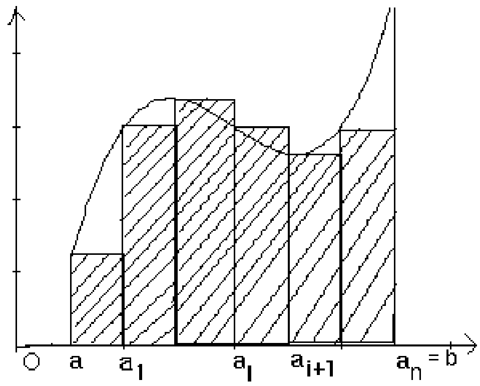
§1Principe

Soit f ,continue et positive sur [a,b] a<b, Cf sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé. On note $I=\int_a^b f(x)dx$. L'intervalle [a,b] est partagé en n intervalles adjacents et de même longueur[6] $h=\dfrac{b-a}{n}$. On posera pour toute la suite :

$a_0 = a$, $a_1 = a+h$, ,........, $a_i = a+ih$,........, $a_n = a+nh = b$.

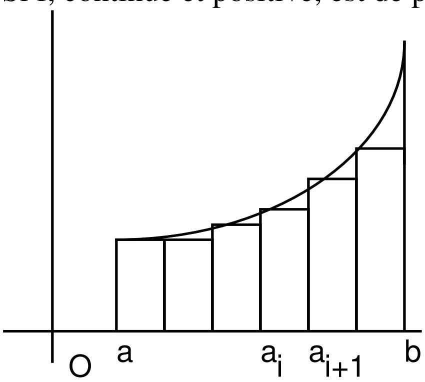
$y_0 = f(a_0)$, $y_1 = f(a_1)$, ...$y_i = f(a_i)$,..........$y_n = f(a_n) = f(b)$.

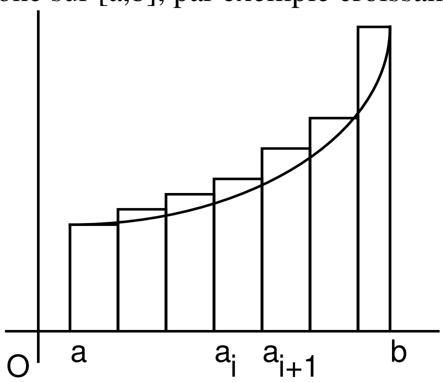
$R_i$désigne le rectangle de largeur h et de longueur y_i;la somme des aires des n rectangles R_0 , R_1,....R_i.....R_{n-1} est notée:$I_R = h(y_0 + y_1 + ... + y_i + ... y_{n-1})$. Par construction, le réel I_R est une valeur approchée du nombre I qui est égal, en unités d'aire, à l'aire du domaine Δ sous la courbe défini par: $M(x,y)\in\Delta \iff \begin{cases} a\le x\le b \\ 0\le y\le f(x)\end{cases}$



§2 Sommes de Riemann pour une fonction continue positive et monotone.

Si f, continue et positive, est de plus monotone sur [a,b], par exemple croissante:





Soit $u_n = h(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1})$ et $v_n = h(y_1 + y_2 + ... + y_n)$ (i) les aires respectives des rectangles qui minorent et majorent le réel $I=\int_a^b f(x)dx$; celui-ci, par définition, est l'aire de Δ. Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour $n > 0$.

---

1 La méthode a déja été exposée au chapitre I (Lors d'un T.P., à la suite du calcul par B.Pascal, de la quadrature du segment de parabole illustrée par le choix de n = 20).

(1) Le nombre I est un majorant de la suite (u_n)

(2) I est un minorant de la suite (v_n)

$$\forall n \in N^* : u_n \le I \le v_n \quad (E)$$

(3) $\forall n \in N^* \quad v_n - u_n = \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)]$ donc $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$

Preuve Les propriétés (1) et (2) sont des conséquences de la croissance de f sur [a,b] et des propriétés intuitives de l'aire (appelées axiomes au Chapitre I).

$\forall x \in [a_i, a_{i+1}]\ f(a_i) \le f(x)$; ainsi $hf(a_i) \le \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx$; ceci est vrai sur tout intervalle partiel, donc par addition, $u_n \le \int_a^b f(x)dx$; soit $u_n \le I$. On démontre de même que $I \le v_n$. Si f est décroissante sur [a,b], le majorant devient minorant, et réciproquement; la méthode est toujours opérante. La relation (E) est démontrée.

Pour (3): $v_n - u_n = h[y_1 + y_2 + \ldots + y_n] - h[y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}] = \frac{(b-a)}{n}(y_n - y_0)$

donc $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$. Alors d'après (E),

$$0 \le I - u_n \le v_n - u_n \text{ ; par suite } \lim_{n\to\infty}(u_n) = I$$

$$u_n - v_n \le I - v_n \le 0 \text{; par suite } \lim_{n\to\infty}(v_n) = I$$

On peut énoncer :

Théorème Définition1: Les réels u_n et v_n, définis ci-dessus par la relation (i), sont appelés "sommes de Riemann" associées à f sur [a,b][7]. Si f est continue, positive et monotone sur [a,b], alors les sommes de Riemann (u_n) et (v_n) définies par la relation (i) sont respectivement des valeurs approchées par défaut et par exès de I à la précision de $\frac{(b-a)}{n}[f(b) - f(a)]$. Ces suites convergent vers l'intégrale $I = \int_a^b f(x)dx$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh) = \int_a^b f(x)dx. \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a+kh) = \int_a^b f(x)dx$$

Pour tout entier $n > 0$: si f est croissante sur [a,b] $u_n \le I \le v_n$.

Si f est décroissante, alors: $v_n \le I \le u_n$.

Remarque Le théorème1 reste vrai si f est non monotone sur [a,b], nous pouvons, au besoin, l'admettre en TS pour réaliser des calculs approchés d'intégrales et prouver des convergences de suites.

Corollaire $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_0 + y_1 + \ldots\ldots + y_{n-1}}{n}\right)$$

La valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle [a,b], a < b, est la limite de la moyenne arithmétique des valeurs prises par f en $a_0, a_1, \ldots. a_i, \ldots\ldots. a_{n-1}$.

Remarque Ce résultat éclaire la terminologie utilisée dans " valeur moyenne de f sur [a,b]".

Preuve: $\lim_{n\to\infty}(u_n) = \int_a^b f(x)dx$ d'après le théorème1; en divisant la suite par (b-a) on obtient le résultat annoncé.

[7] Ce sont également des sommes de Darboux de f sur [a,b], puisque f est croissante (resp. décroissante).

§3 Intégrales et suites

Si on sait calculer la valeur de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$, le théorème1 permet de montrer la convergence et calculer la limite des suites définies dans ce théorème. Inversement, si on sait calculer la limite de (u_n) et ou (v_n), on aura la valeur de l'intégrale.

Exemple1; $v_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 +.....+\left(\frac{i}{n}\right)^2 +.....+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right]$

Sous cette écriture, (v_n) est une somme de Riemann relative à f sur $[0,1]$, f définie par $f(x) = x^2$. l=1/3

Exemple2

$$\forall n \in N^* \quad v_n = \frac{\pi}{2n}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{2n}\right) +.....+ \cos\left(\frac{i\pi}{2n}\right).....+\cos\left(\frac{n\pi}{2n}\right)\right]$$

.

Donc v_n est une somme de Riemann relative à f sur[a,b]

$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $f(x) = \cos x$; $\frac{b-a}{n} = \frac{\pi}{2n}$; $a_i = i.\frac{\pi}{2n}$ $\quad \lim_{n\to\infty}(v_n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

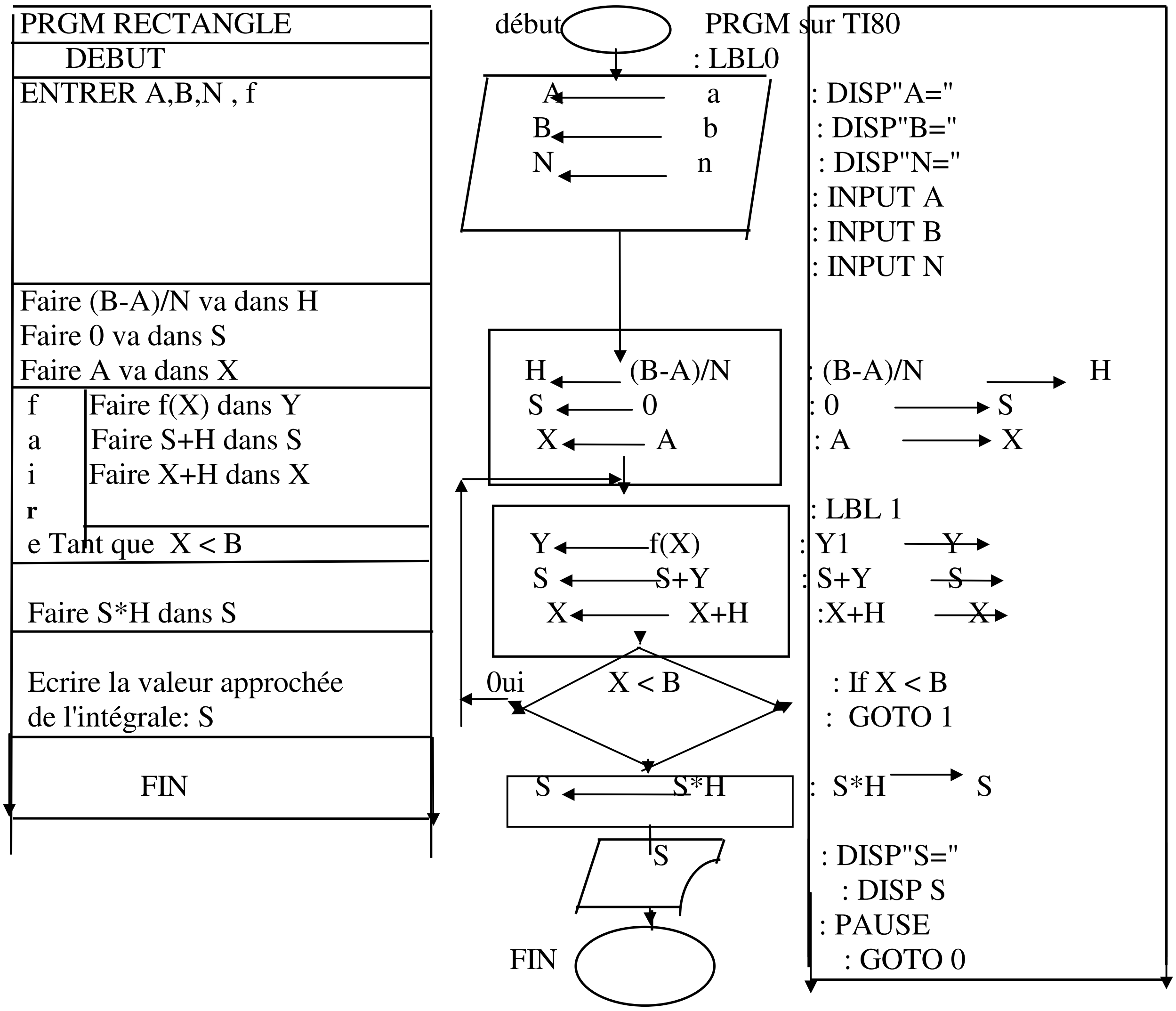
Exemple 3: Soit la suite: $v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} +.......+ \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. C'est une somme de Riemann relative à

$f: x \to \frac{1}{1+x}$ sur $[0,1]$, donc elle converge vers. $\int_0^1 \frac{1}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$.

En conclusion $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \ln 2$. Représenter graphiquement f et interpréter le résultat obtenu.

III PROGRAMME RECTANGLE. CALCULS.

§1 Organigrammes et programme sur calculatrice



Les organigrammes sont donnés, selon le savoir- faire des élèves. Par contre, ceux ci doivent réaliser sur leur calculatrice, au titre de l'initiation à la programmation, les programmes correspondants. J'ai donné, ici, à titre indicatif, le programme sur TI 80. Sur celle ci, la fonction f sera stockée en Y1. Sur la Casio, par exemple, f est mise en" mémoire fonction "f_1. Ces matériels sont élémentaires et choisis en tant que tels.

§2 Calculs

a) A partir de l'organigramme ci-dessus (ou d'un autre à votre convenance) rédiger le programme "rectangle".

b) Compléter le tableau ci-dessous donnant une valeur approchée des termes de la suite $v_n = \frac{b-a}{n}[y_0 + y_1 + \dots\dots\dots + y_{n-1}]$, pour les fonction u, v et w définies au paragraphe I
de ce chapitre. On fera successivement n = 5, 10, 50, 100, 500, 1000.

c) Que pouvez vous conjecturer sur la valeur exacte de $4.\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$?

5	$\int_1^2 \frac{dx}{x}$	$\int_0^1 e^{-x^2}dx$	$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$
10	0,7187714	0,7778168	3,0399259
50	0,6981722	0,7531208	3,1215259
100	0,6956534	0,7499786	3,1315759
500	0,6936474	0,747456	3,1395919
1000			3,1405925

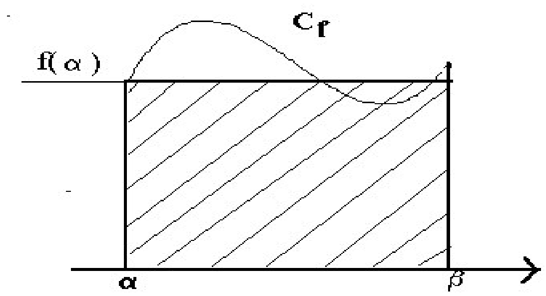
§3 Applications

Calculer des valeurs approchées des intégrales suivantes. On montrera que les fonctions continues proposées sont positives et monotones; préciser dans chaque cas si la valeur obtenue est approchée par excès ou par défaut.

$$I = \int_1^2 \frac{x^2-1}{x^2+1}dx \qquad J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^{\sin x}dx \qquad L = \int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x} \qquad M = \int_0^{\ln 3} \sqrt{e^x - 1}dx$$

IV MAJORANTS DES ERREURS
(Cours ou Travaux Pratiques au choix.)

I COURS



Soif f une fonction continue, positive , dérivable et sa dérivée continue sur[a,b]. On pose e l'erreur commise, en valeur absolue, en remplaçant(interpolant) f par la fonction constante:
$x \to f(\alpha)$ sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$
inclus dans $[a, b]$

$$e = \left| \int_\alpha^\beta f(t)dt - (\beta - \alpha)f(\alpha) \right|$$

.

L'objectif est de majorer e, le moyen : l'inégalité des accroissement finis.

§ 1 Interprétation graphique de l'inégalité des accroissement finis

Rappel: Si f est dérivable sur un intervalle *I*, a et b de *I*, a < b, si de plus il existe m et M tels que: pour tout x de *I* $m \le f'(x) \le M$ ALORS on a l'encadrement:
$m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a)$
Nous supposons ici que, de plus, f est positive sur *I* . Si la dérivée est encadrée sur *I*, l 'accroissement de f sur [a,b] est donc bien maîtrisé par cette inégalité.
Soit$[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, $\alpha < \beta$ et posons $\Delta x = \beta - \alpha$, $\Delta y = f(\beta) - f(\alpha)$
L'inégalité des accroissement finis s'écrit pour tout$x \in [\alpha, \beta]$:

$$\left.\begin{aligned} & m(x-\alpha) \le f(x)-f(\alpha) \le M(x-\alpha) \\ & \text{soit:} \quad m\Delta x \le \Delta y \le M\Delta x \end{aligned}\right\} \text{(i)}$$

A partir du point A(α,f(α)), traçons les droites (AQ) et (AR) de pentes[8] respectives m et M; la relation (i) implique:

$$\left.\begin{aligned} & \overline{UN} = f(x)-f(\alpha); \quad \overline{UV} = M(x-\alpha) \ \text{ et } \ \overline{UW} = m(x-\alpha) \\ & \text{donc } \overline{UW} \le \overline{UN} \le \overline{UV} \quad \text{ainsi } N \in [W,V] \end{aligned}\right. \text{(ii)}$$

Ainsi tout point de Cf d'abscisse $x \in [\alpha,\beta]$ est intérieur au triangle QAR.

Pour $x = \beta$, la relation (ii) donne

$$\overline{PB} = f(\beta)-f(\alpha); \overline{PQ} = M(\beta-\alpha); \overline{PR} = m(\beta-\alpha)$$

$$\text{donc } \overline{PR} \le \overline{PB} \le \overline{PQ} \quad ; \quad B \in [R,Q]$$

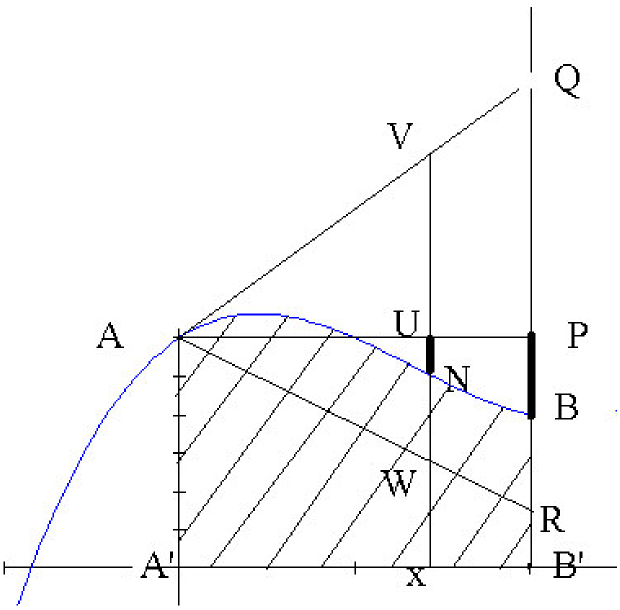


figure1

La relation (ii) est une interprétation géométrique de l'**inégalité des accroissements finis** ; Δy est encadré par les réels $\overline{UV}$ et $\overline{UW}$. On endéduit que Cf, pour $x \in [\alpha,\beta]$, est entièrement incluse dans le triangle RAQ.
On suppose, sur la figure 1, que le trapèze A'ARB' est situé dans le demi-plan des y positifs.
. Ainsi l'aire hachurée est comprise entre les aires des trapèzes A'ARB' et A'AQB'.

Ce qui se traduit par les inégalités suivantes :

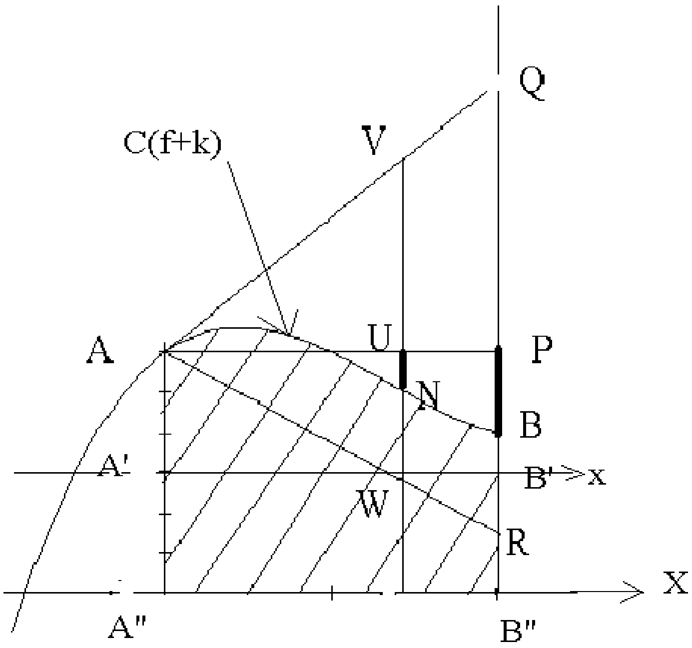
$$(\beta-\alpha)\frac{[f(\alpha)+m(\beta-\alpha)+f(\alpha)]}{2} \le \int_\alpha^\beta f(x)dx \le (\beta-\alpha)\frac{[f(\alpha)+M(\beta-\alpha)+f(\alpha)]}{2}$$

$$(\beta-\alpha)f(\alpha)+m\frac{(\beta-\alpha)^2}{2} \le \int_\alpha^\beta f(x)dx \le (\beta-\alpha)f(\alpha)+M\frac{(\beta-\alpha)^2}{2}$$

$$m\frac{(\beta-\alpha)^2}{2} \le \int_\alpha^\beta f(x)dx-(\beta-\alpha)f(\alpha) \le M\frac{(\beta-\alpha)^2}{2} \text{(iii)}$$

alors $M_1 = \text{Sup}(|m|,|M|)$, on obtient finalement:

[8] Ici le repère est orthonormé, et « pente » est un terme adapté ; $\tan(\vec{i}, \vec{AR}) = m$.



. Si le trapèze $\alpha AR\beta$ n'est pas inclus entièrement dans le demi plan des y positifs. On applique le même raisonnement à la fonction f+k, k suffisamment grand pour que le point R ait une ordonnée positive; par exemple (voir fig 2). $k \geq \beta R$; soit $k \geq |m(\beta-\alpha)+f(\alpha)|$
Alors le réel positif $k(\beta-\alpha)$ s'ajoute aux membres des inégalités ci-dessus. On retranche ce nombre en fin de calcul pour obtenir les inégalités (iii), et enfin la même majoration de e. sur la figure 2 ci-contre, l'aire hachurée est ici l'aire sous la courbe représentative de la fonction f+k, l'aire du rectangle A'A"B"B' se retrouvera à chaque membre des inégalités. Le lemme est encore vrai.

Lemme. L'erreur e est majorée sur $[\alpha,\beta]$ **:** $\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx-(\beta-\alpha)f(\alpha)\right| \leq M_1\dfrac{(\beta-\alpha)^2}{2}$

§2 Majoration de l'erreur sur l'intervalle [a,b]

a) Appliquons le lemme ci-dessus à chaque intervalle$[a_i, a_{i+1}]$. La relation de Chasles pour l'intégrale donne:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a_0}^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + \ldots\ldots\ldots\ldots \int_{a_{n-1}}^{b} f(x)dx \text{ , donc}$$

$$I - I_R = \left(\int_{a_0}^{a_1} f(x)dx - hy_0\right) + \left(\int_{a_1}^{a_2} f(x)dx - hy_1\right) + \ldots\ldots\ldots\left(\int_{a_{n-1}}^{b} f(x)dx - hy_{n-1}\right)$$

$$|I - I_R| \leq \sum_{i=0}^{i=n-1}\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx - hy_i\right|$$

Nous supposons, dès le début du chapitre(A I,1°), que f est dérivable, et sa dérivée bornée sur [a,b]. Soit $M_1 = \sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|$. [9]

Chaque terme du second membre est majoré par $M_1 \frac{h^2}{2}$ d'après le lemme ci-dessus.

Théorème 2: Si f est positive dérivable et sa dérivée continue sur [a,b]] et bornée; on pose $M_1 = \sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|$, I et I_R désignant respectivement $\int_a^b f(x)dx$ et la somme des aires des n rectangles définis ci-dessus, ALORS I_R est une valeur approchée de I, et l'erreur vérifie: $|I - I_R| \le \frac{M_1}{2n}(b-a)^2$.

TRAVAUX PRATIQUES

Selon l'objectif visé ou le temps dont on dispose, on peut faire calculer le Majorant par les élèves en proposant, l'énoncé suivant. Mais alors, **on perd l'intuition géométrique** qui est l'objectif poursuivi dans cet essai. Je propose cet énoncé à titre indicatif.

ENONCE

1° Partie

a) Utiliser l'image d'un segment par une fonction continue pour justifier l'existence d'un réel positif m_1 tel que : $\forall x \in [\alpha,\beta] \quad |f'(x)| \le m_1$. (i)

. On posera $m_1 = \sup_{x\in[\alpha,\beta]}|f'(x)|$. b) Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour démontrer la proposition: $\forall x \in [\alpha,\beta] \qquad -m_1(x-\alpha) \le f(x) - f(\alpha) \le m_1(x-\alpha)$

c) En déduire l'inégalité: $\left|\int_\alpha^\beta f(t)dt - (\beta-\alpha)f(\alpha)\right| \le m_1 \frac{(\beta-\alpha)^2}{2}$.

$m_1 = \sup_{x\in[\alpha,\beta]}|f'(x)|$, alors $\left|\int_\alpha^\beta f(t)dt - (\beta-\alpha)f(\alpha)\right| \le m_1 \frac{(\beta-\alpha)^2}{2}$

<u>Lemme</u> SI f est continue, dérivable, de dérivée continue sur le segment $[\alpha,\beta]$

. On pose $m_1 = \sup_{x\in[\alpha,\beta]}|f'(x)|$ ALORS $\left|\int_\alpha^\beta f(t)dt - (\beta-\alpha)f(\alpha)\right| \le m_1 \frac{(\beta-\alpha)^2}{2}$

2°Partie

Les notations étant celles du **II** et f dérivable et de dérivée continue sur [a,b], a a < b. On pose $M_1 = \sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|$.

Démontrer, $|I - I_R| \le \left|\int_{a_0}^{a_1} f(t)dt - hy_0\right| + \left|\int_{a_1}^{a_2} f(t)dt - hy_1\right| + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left|\int_{a_{n-1}}^{a_n} f(t)dt - hy_{n-1}\right|$

b) En déduire pour n>1: $|I - I_R| \le \frac{M_1}{2n}(b-a)^2$. On posera $R_n = \frac{M_1}{2n}(b-a)^2$

On en déduit aisément le théorème 2 ci-dessus.

III stade du CALCUL (T.P)

[9] Remarquons que dans cette étude cette expression n'a pas d'autre sens que celui qu'on lui a donné au A 2° question.

§1Reprise des résultats du I

a) Pour chacune des intégrales $\int_1^2 \frac{dt}{t}$, $\int_0^1 e^{-t^2} dt$ et $\int_0^1 \frac{4dt}{1+t^2}$, calculer R_n en fonction de l'entier n; on utilisera les résultats obtenus au §**I** pour le réel M_1.

b) Déterminer, pour chacune des intégrales ci-dessus, le nombre de rectangles suffisants pour que I_r soit une valeur approchée par excès de I à 10^{-3} près.

§2 Organigrammes et programme

PRGM RECT 2

DEBUT

Entrer f, A, B, N, M

Faire (B-A)/N va ds H
Faire 0 va dans S
Faire A va dans X

répéter:
Faire f(X) dans Y
Faire S+Y dans S
Faire X+H dans X
jusque $X \geq B$

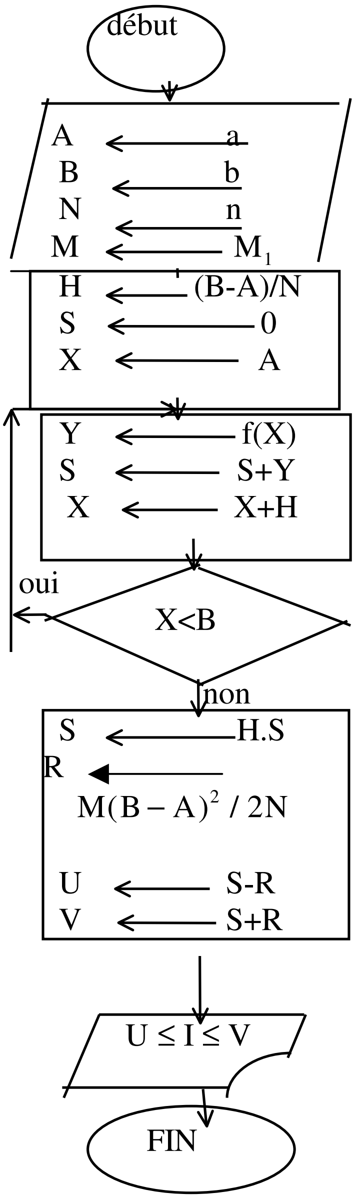
Faire H*S va dans S

Faire $M * \frac{(B-A)^2}{2N}$ dans R

Faire S-R va dans U
Faire S+R va dans V

Ecrire: $U \leq I \leq V$

FIN



prgm sur TI80

```
:LBL0
: DISP"A,B,N,M"
:Input A
:Input B
: Input N
: input M
:(B-A)/N ⟶ H
:0 ⟶ S
: A ⟶X
:LBL 1
: Y1 ⟶Y
: S+Y ⟶S
: X+H ⟶ X
: If  X<0
:GOTO 1
: : H*S ⟶ S
: M*(B-A)²/2N ⟶ R
:S-R ⟶ U
: S+R ⟶V
:DISP"U ≤ I ≤ V"
: DISP U
: DISP V
:PAUSE
: GOTO 0
```

En s'inspirant de l'organigramme ci-dessus, ou d'un autre à votre convenance, élaborer un programme, sur votre calculatrice, permettant d'encadrer l'intégrale I , pour les fonctions u, v et w; et pour n = 5,10,50,100,500,1000. Rappel du I[10]: pour f(x)= $\frac{1}{x}$; $M_1 = 1$.

pour $f(x) = e^{-x^2}$; $M_1 = \sqrt{\frac{2}{e}}$; pour $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$; $M_1 = \frac{12\sqrt{3}}{8}$.

J'ai donné, à titre d'exemple, le programme obtenu sur la TI80. Bien entendu, je ne vise pas la sophistication dans ces routines, mais la simplicité, il existe des programmes plus performants.

§3 Calculs approchés et encadrements

A l'aide des résultats obtenus au paragraphe 2, établir un tableau du type suivant pour les trois intégrales sujets de cette étude. $R_n = \frac{1}{2n}$

$f: x \to \frac{1}{x}$	n	Méthode des rectangles. $U \le I \le V$		
$M_1 = 1$	5		$\le I \le$	
	10	0,6687714	$\le I \le$	0,7687714
	50		$\le I \le$	
	100	0,6906534	$\le I \le$	0,7006534
	500	0,6926474	$\le I \le$	0,6946474
	1000		$\le I \le$	

Ce travail qui permet un calcul approché de $\int_1^2 \frac{dt}{t}$, abouti sur plusieurs points importants: par un premier calcul, il permet d'abord un encadrement de ln2, puis en comparant les résultats à la valeur de ln2 donnée par une table de valeurs, de mesurer l'**éfficacité de la méthode des rectangles**. Remarquons, qu'un résultat d'analyse est établi en TS par des **considérations géométriques**, présentes à toutes les étapes. **La rigueur**, la formalisation, réside ici dans le calcul d'un **majorant des erreurs** s'appuyant sur l'inégalité des accroissements finis.

[10] Ce rappel est destiné aux élèves n'ayant pas abouti au I de ce chapitre, afin qu'ils puissent continuer .

B LA METHODE DU POINT MEDIAN

Nous allons constater dans les trois méthodes, le point médian, les trapèzes et Simpson, que $x_k = a + (2k-1)h$ désigne l'abscisse du milieu des intervalles partiels; nous aurons ainsi une simplification dans la description et la programmation. Enfin nous retrouverons la cohérence du chapitre dans l'utilisation de l'inégalité des accroissements finis pour calculer des majorants des erreurs.

I PROBLEMATIQUE SUR TROIS EXEMPLES (Travaux pratiques)

ENONCE

1° Question

a) Etudier les variations des fonctions u et v et w définies au A I.

Tracer leurs graphes respectifs dans des repères orthonormés distincts (unité: 10cm) et les tangentes aux points remarquables.

b) Démontrer que u et v et w sont dérivables à l'ordre deux et leurs dérivées continues sur les intervalles de définition de u, v et w.

2° Question Pour u et v, et w justifier et calculer les nombres suivants: $M_2 = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$ respectivement sur $[1,2]$ et $[0,1]$.

3°Problématique

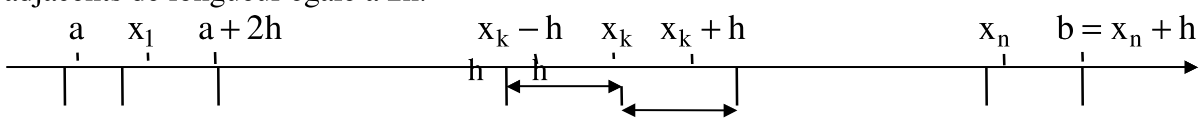
Hachurer, sur les graphiques, les domaines dont les intégrales

$\int_1^2 \frac{dx}{x}$ et $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ puis $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$ sont les aires dans l'unité choisie. Nous allons développer une méthode de calculs approchés de ces intégrales voisine de celle des rectangles. Nous obtiendrons un encadrement de ln2, et le résultat fourni par les tables où un calculateur puissant nous permettra de mesurer l'efficacité de cette méthode. Dans un second temps nous comparerons cette seconde méthode avec la méthode de rectangles; enfin nous justifierons les conjectures sur les performances comparées des deux méthodes par un calcul de majorants des erreurs.

II EXPOSE DE LA METHODE

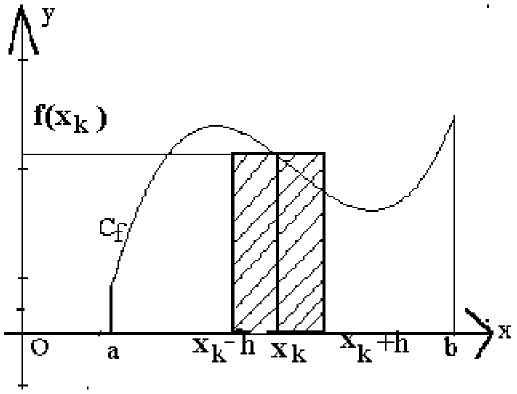
§1 Définition de la méthode du point médian.

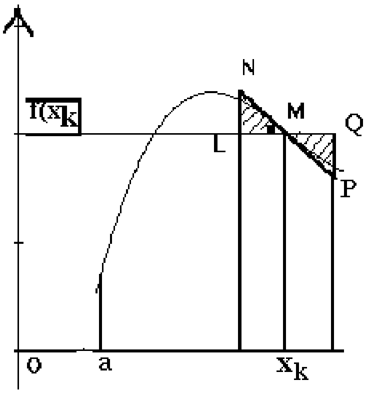
Soit f continue, positive deux fois dérivable et ses dérivées continues sur le segment [a,b], a < b, soit n entier strictement positif, on pose $h = \frac{b-a}{2n}$ et on partage [a,b] en n intervalles adjacents de longueur égale à 2h.



On pose $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k, \ldots\ldots\ldots x_n$ les milieux de ces intervalles consécutifs.

Alors: $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 3h$,......, $x_k = a + (2k-1)h$,.........$x_n = a + (2n-1)h$





Interpoler f sur $\left[x_k - h, x_k + h\right]$ par la fonction constante $x \to f(x_k)$ équivaut à interpoler f par la fonction affine tangente en $M(x_k, f(x_k))$ à Cf, puisque les triangles isométriques MPQ et LMN ont même aire. Ainsi le degré du polynôme d'interpolation est 1, malgré les apparences et la méthode peut s'appeler aussi bien " méthode des tangentes".

Posons alors $I_M = 2h\left[f(x_1) + f(x_2) + \ldots\ldots + f(x_k) + \ldots\ldots. + f(x_n)\right]$, on constate que I_M est la somme des aires de n rectangles médians. Ce nombre est une valeur approchée de l'aire du domaine sous la courbe, par définition de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$.(voir chap I)

III PROGRAMME DU POINT MEDIAN

§1 Organigramme et programme

L'indice variable des milieux des intervalles partiels sera k.

a, b, n, I_M, h , x_k , $f(x_k)$ seront respectivement représentés par les variables:

A, B, N ,S, H, $A + (2K - 1)H$, Y_1.

- Sur TI80(81, 82, 83) , la fonction f à intégrer sera stokée en Y_1, et dans le déroulement du programme, chaque fois qu'une valeur est attribuée à x; alors Y_1 prend la valeur de f(x).
- Sur Casio, f est stokée en mémoire fonction f_1 ou f_2...... ou f_6, et chaque fois qu'une valeur est attribuée à x, le rappel de f_i affiche le résultat f(x).

RECT. MEDIANS

DEBUT

Entrer f, A, B, N

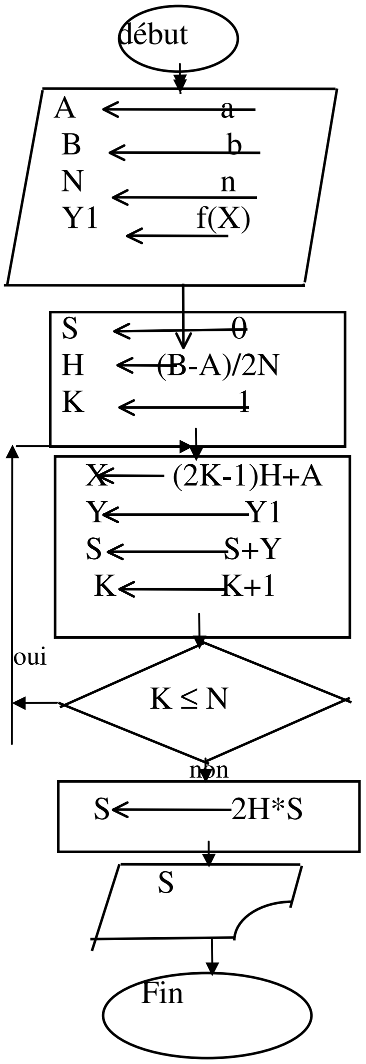
Faire 0 va dans S
Faire (B-A)/2N dans H
Faire 1 va dans K

répéter
Faire (2K-1)H +A ds X
Faire f(X) va dans Y
Faire S+Y va dans S
Faire K+1 va dans K
jusque K > N

Faire 2H*S va dans S

Ecrire S

FIN



PRGM sur TI80
RECM

```
:LBL 0
:DISP" A, B, N "
:INPUT A
:NPUT B
:INPUT N
: 0 ⟶ S
: (B-A)/2N ⟶ H
: 1 ⟶ K
: LBL 1
:(2K-1)H+A ⟶ X
:Y1 ⟶ Y
:S+Y ⟶ S
: K+1 ⟶ K
: If K ≤ N
: GOTO 1
: 2HS ⟶ S
: DISP" S= "
: DISP S
: PAUSE
: GOTO 0
```

§2 Calculs approchés

1° question A partir de l'organigramme ci-joint réaliser un programme sur votre calculatrice[11]. Il est loisible de réaliser ses propres organigrammes et programmes. Ce programme doit permettre de calculer I_M, une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur un segment [a,b].

2° question Calculer les valeurs approchées, par la méthode du point médian, des intégrales $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ et $\int_0^1 \frac{4dx}{1+x^2}$: pour n = 5, 10, 50, 100, 500, 1000.

On présentera les résultats sous la forme d'un tableau comme celui-ci:

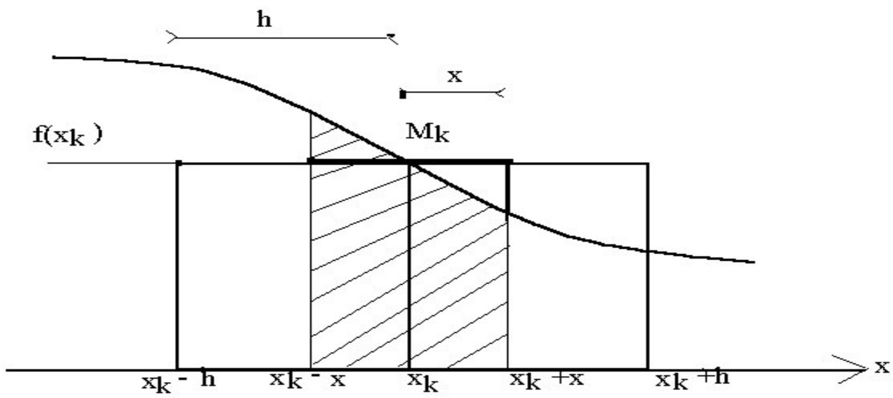
	$\int_1^2 \frac{dx}{x}$	$\int_0^1 e^{-x^2}dx$	$\int_0^1 \frac{4dx}{1+x^2}$
5			
10	0,6928353	0,74713087	3,1424259
50	0,6931346	0,74683639	3,1416259
100	0,6931440	0,74682719	3,1416009
500	0,6931470	0,74682425	3,1415929
1000	0,6931471493	0,7468241635	3,1415927

La calculatrice donne pour ln2 : 0,6931471806 et 3,1415926 pour π

3° Question Que peut-on conjecturer pour les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par :
$S_n = 2h\sum_{k=1}^{n} u(x_k)$; $S'_n = 2h\sum_{k=1}^{n} v(x_k)$ et $S''_n = 2h\sum_{k=1}^{n} w(x_k)$? En comparant les résultats pour une même fonction et un même entier n, peut-on déjà dire quelle est la méthode la plus performante entre les rectangles et le point médian ? Si oui peut-on dire pourquoi?

IV MAJORANT DES ERREURS (COURS)

1° Partie



Soit f deux fois dérivable et ses dérivées continues sur [a,b] ; partageons cet intervalle en n intervalles partiels de longueurs 2h.

Soit $[x_k - h, x_k + h]$, $x_k = a + (2k-1)h$, $h = \dfrac{b-a}{2n}$, k variant de 1 à n. Sur chaque intervalle, l'erreur, en valeur absolue, commise en interpolant f par la fonction affine tangente en M_k, est notée $e_k = \left|\int_{x_k-h}^{x_k+h} f(t)dt - 2hf(x_k)\right|$.

$x \in [0,h]$, on pose $R(x) = \int_{x_k-x}^{x_k+x} f(t)dt - 2xf(x_k)$. R(x) est l'erreur commise sur l'aire en interpolant f sur $[x_k - x, x_k + x]$ par la tangente à Cf au point d'abscisse x_k. L'objectif est de majorer $e_k = |R(h)|$.

a) Si F est une primitive de la fonction continue f sur [a,b], alors R(x) peut s'écrire
$R(x) = F(x_k + x) - F(x_k - x) - 2xf(x_k)$ (1)
On ne peut appliquer l'inégalité des accroissements finis à (1); cette différence n'est pas un accroissement de F à cause du terme $2xf(x_k)$; dérivons (1), il vient sur [0,h]
$R'(x) = f(x_k + x) + f(x_k - x) - 2f(x_k)$; ceci n'est pas non plus un accroissement de fonction, dérivons une nouvelle fois:
$R''(x) = f'(x_k + x) - f'(x_k - x)$ (2)
Cette fois l'inégalité des accroissement finis s'applique à f '; ceci va permettre d'encadrer R"(x), puis R'(x) et enfin R(x) par intégrations successives.

b) f " est continue et la fonction valeur absolue aussi, la composée $|f''|$ est donc continue sur [a,b]. L'image du segment [a,b] par $|f''|$ est donc un segment $[m_2, M_2]$, M_2 est donc une valeur prise par $|f''|$.
Il existe $c \in [a,b]$ tel que $|f''(c)| = M_2$ et $\forall x \in [a,b]$ $|f''(x)| \le M_2$. On notera

$M_2 = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$. Il vient donc:

$\forall\ x \in [0,h] \quad |f'(x_k + x) - f'(x_k - x)| \le 2M_2 x \ (3)$

$\forall x \in [0,h] \quad |R''(x)| \le 2M_2 x \ (4)$. Remarquons que R"(0) = 0, R'(0) = 0 et R(0) = 0.

Pour tout t de $[0,x] \subset [0,h]$; $|R''(t)| \le 2tM_2$

C'est à dire: $\forall t \in [0,h] \qquad -2tM_2 \le R''(t) \le 2tM_2$. (4).

L'encadrement de R" va permettre, par intégration successives d'encadrer R(h).

c)Intégrons sur [0,x], il vient:

$$-2M_2 \frac{x^2}{2} \le R'(x) \le 2M_2 \frac{x^2}{2}$$

$\forall x \in [0,h] \qquad - M_2 x^2 \le R'(x) \le M_2 x^2$

Si $t \in [0,x] \subset [0,h] \quad - M_2 t^2 \le R'(t) \le M_2 t^2$

Intégrons sur [0,x]: $-M_2 \frac{x^3}{3} \le R(x) \le M_2 \frac{x^3}{3}$, puisque R(0)=0.

$$\forall x \in [0,h] \quad |R(x)| \le M_2 \frac{x^3}{3} \ (5) \quad \text{Pour } x = h \quad |R(h)| \le M_2 \frac{x^3}{3} \ (6)$$

D'où le lemme. Soit f une fonction positive, deux fois dérivable et de dérivées continues sur le segment $[\alpha,\beta]$. On pose $M_2 = \sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f''(x)|$

$$\alpha < \beta, \text{ on pose } \beta - \alpha = 2h \text{ et } \gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\text{alors} \quad \left| \int_\alpha^\beta f(t)dt - 2hf(\gamma) \right| \le \frac{M_2}{3} h^3$$

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_k-h}^{x_k+h} ft)dt \qquad I - I_M = \sum_{k=1}^{n} \left[\int_{x_k-h}^{x_k+h} f(t)dt - 2hf(x_{k)} \right]$$

La relation de Chasles donne :

En appliquant le lemme sur chaque intervalle partiel, on obtient :

$$|I - I_M| \le \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{x_k-h}^{x_k+h} f(t)dt - 2hf(x_k) \right|,$$

$$\left| \int_a^b f(t)dt - I_M \right| \le nM_2 \frac{h^3}{3}; \quad h = \frac{b-a}{2n} \quad \text{donc} \quad \frac{h^3}{3} = \frac{(b-a)^3}{24n^3}$$

$$\left| \int_a^b f(t)dt - I_M \right| \le M_2 \frac{(b-a)^3}{24n^2} \quad (7) \text{ d'où le théorème}$$

Théorème 3Soit la fonction f, positive, deux fois dérivable et ses dérivées continues sur [a,b]; on pose $M_2 = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$ et I_M la somme des aires des n rectangles médians.

Alors un majorant de l'erreur est tel que: $\left| \int_a^b f(t)dt - I_M \right| \le M_2 \frac{(b-a)^3}{24n^2}$ (7)

2° Partie (T.P.)

on posera $R_n = M_2 \dfrac{(b-a)^3}{24n^2}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$

1°Question Utilisant l'organigramme ci-joint, réaliser un programme permettant de calculer un encadrement des intégrales

$\int_1^2 \frac{dx}{x}$, $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ et $\int_0^1 \frac{4dx}{1+x^2}$ pour n=10, 50, 100, 500. On utilisera les valeurs approchées de ces intégrales que l'on a calculées au III 2°. Pour u, v et w, M_2 vaut respectivement; 2, 2 et $\frac{32}{3\sqrt{3}}$.

2° Question Dans chaque cas, déterminer un entier n_0 suffisant pour que I_M soit une valeur approchée de chacune de ces intégrales à 10^{-3} , 10^{-6} , 10^{-8}près.

3° Question Indiquer les facteurs qui influent, selon vous, pour rendre la méthode du point médian plus rapide que celle des rectangles.

RECT. MEDIANS, MAJORE

DEBUT

Entrer f, A, B, M, N

Faire 0 va dans S
Faire (B-A)/2N dans H
Faire 1 va dans K

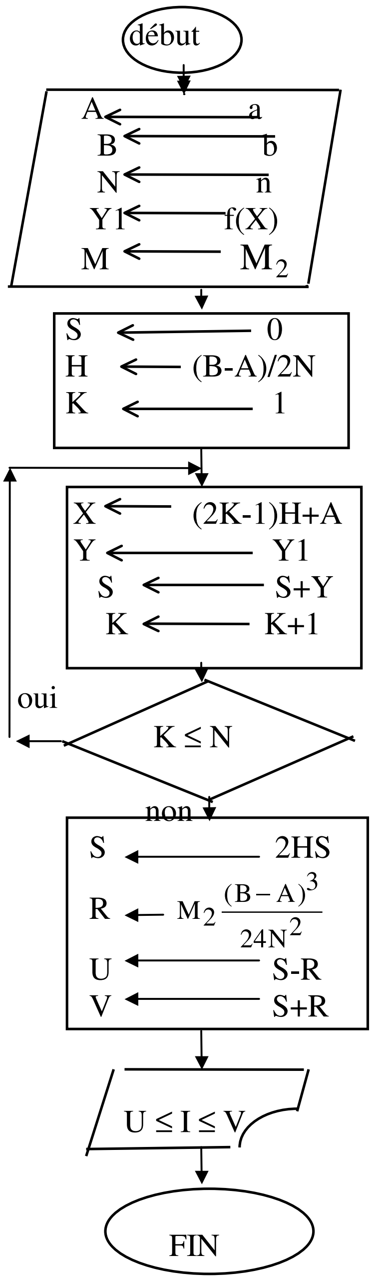
répéter
- Faire (2K-1)H +A ds X
- Faire f(X) va dans Y
- Faire S+Y va dans S
- Faire K+1 va dans K

jusque K > N

Faire 2H*S va dans S
Faire $M_2 \frac{(B-A)^3}{24N^2}$ va dans R
Faire S-R va dans U
Faire S+R va dans V

Ecrire $U \le I \le V$

FIN



PRGM sur TI80
RECMM
```
:LBL 0
:DISP" A, B, N "
:INPUT A
:NPUT B
:INPUT N
:INPUT M
: 0 → S
: (B-A)/2N → H
: 1 → K
: LBL 1
:(2K-1)H+A → X
:Y1 → Y
:S+Y → S
: K+1 → K
: If K ≤ N
: GOTO 1
: 2HS → S
: M2 (B-A)^3/24N^2 → R
: S-R → U
: S+R → V
: DISP U
: DISP V
: DISP " U ≤ I ≤ V"
: PAUSE
: GOTO 0
```

$f: x \to \frac{4}{1+x^2}$	n	Méthode des rectangles médians. $U \le I \le V$		
$M2=32/3\sqrt{3}$	5		$\le I \le$	
	10	3,1398599	$\le I \le$	3,1449919
	50		$\le I \le$	
	100	3,1415753	$\le I \le$	3,14162664
	500		$\le I \le$	
	1000	**3,14159248**	$\le I \le$	**3,141592994**

- Sur la TI 30, la fonction est stockée en Y1, M2 est un majorant de l'erreur commise dans cette méthode; il est stocké dans la mémoire R. Notons bien qu'on ne tient pas compte des erreurs dues aux arrondis de la machine.
- U =S-R et V = S+R sont des valeurs approchées par défaut et par excès de l'intégrale recherchée : $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$. La valeur de π est ici atteinte à la précision de 10^{-6} pour n = 1000.
- nous allons les utiliser dans l'exercice suivant.

EXERCICE : Calcul approché du réel π.

On appelle F la primitive de $f: x \to \frac{1}{1+x^2}$ qui s'annule en 0. Donc (voir chapitre II Théorème 6). $x \in R;\ F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

1° question

G est definie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $G(x) = \tan x$ Démontrer que G est une bijection de I sur $]-\infty,+\infty[$; ainsi elle admet une application réciproque notée G^{-1}.

2° Question Démontrer que la composée $H = F \circ G$ est dérivable sur I.
Calculer sa fonction dérivée , en déduire que :

$\forall x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ $(F \circ G)(x) = x$. et que $F = G^{-1}$.

3° **Question** En remarquant que**,** $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = F(1)$

en déduire la valeur de I, et un encadrement du réel π. On choisira n = 1000 pour le calcul approché de I par la méthode du point médian.

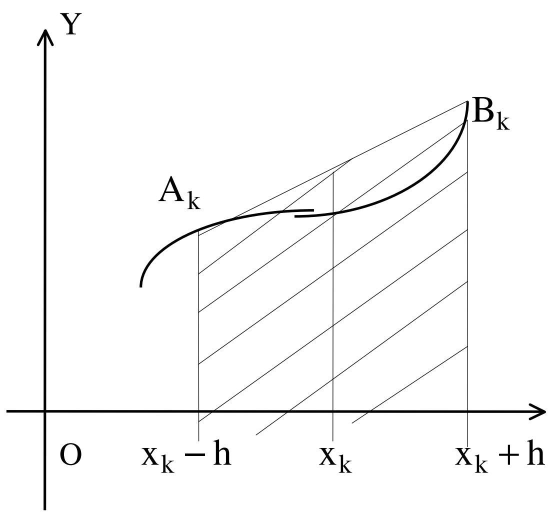
C METHODE DES TRAPEZES

I description du procédé (Cours) Les notations sont celles de la méthode des rectangles médians, sur chaque intervalle partiel on interpole f par la fonction affine dont la courbe représentative est la droite(A_kB_k).

L'aire du trapèze qui approxime $\int_{x_k-h}^{x_k+h} f(t)dt$

Est égale à : $2h\dfrac{[f(x_k-h)+f(x_k+h)]}{2} = h[f(x_k-h)+f(x_k+h)]$.

En sommant les aires de ces n trapèzes, on obtient une valeur approchée de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$:



$$I_T = h[f(x_1-h)+2f(x_2+h)+.........+2f(x_{n-1}-h)+f(x_n+h)]$$
$$I_T = h[f(a)+2f(a+2h)+............f(a++2nh)+f(b)]$$

Dans cette somme, il y a n termes de la forme $2f(a+kh)$

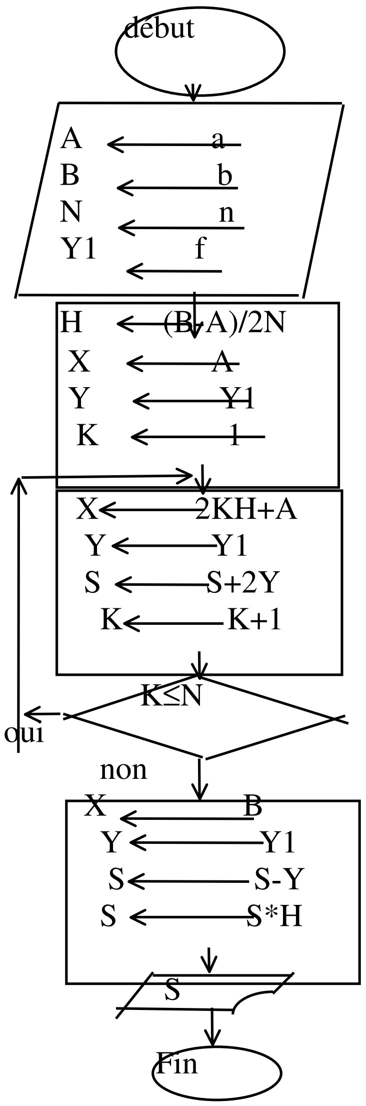
II Programmation et calculs (TRAVAUX PRATIQUES)

a) A partir de l'organigramme ci-joint, écrire un programme permettant de calculer la valeur approchée I_T pour toute fonction continue et positive sur un segment de R, en fixant n, le nombre de trapèzes.

b) Calculer I_T pour les intégrales $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, et $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ et pour n = 5, 10, 50, 100, 500, et 1000. Présenter les résultats sur un tableau (Voir méthode des rectangles médians)

c) Comparer les résultats obtenus sur ces deux intégrales et par les trois méthodes; les rectangles, les rectangles médians et les trapèzes. Que peut-on conjecturer sur la performance relative de ces trois méthodes?

TRAPEZES
DEBUT
ENTRER f, A, B, N
Faire (B-A)/2 va dans H Faire A va dans X Faire f(x) va dans Y Faire K=1
répéter: Faire 2KH+A dans X Faire f(X) va dans Y Faire S+2Y va ds S Faire K+1 va dans K JUSQUE K > N
Faire B va dans X Faire f(X) va dans Y Faire S-Y va dans S Faire S*H va dans S
Ecrire S
FIN



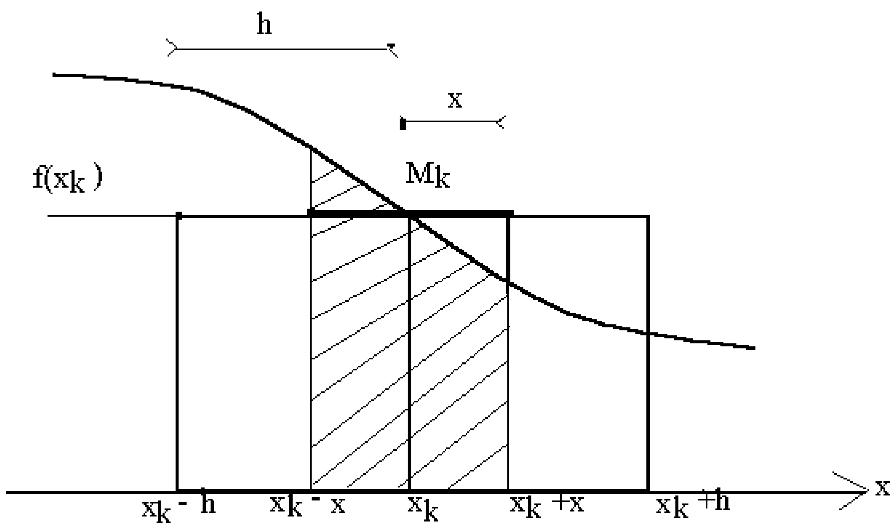

```
PRGM TRAPEZES
: LBL0
:DISP" A=,B=,N= "
: INPUT A
:INPUT B
: INPUT N
: (B-A)÷2N →H
: A →X
: Y1 →Y
: 1 →K
: LBL1
:    2KH+A→X
:  Y1→Y
:   S+2Y→S
:   K+1 → K
: IF K≤N
: GOTO 1
: B → x
: Y1 →Y
: S-Y →S
: SH  →S
: DISP" S= "
: DISP S
: PAUSE
:GOTO 0
```

- Je donne ici le programme réalisé sur TI80 à titre indicatif pour le lecteur.

d) Sachant qu'une méthode, identique à celle utilisée pour les rectangles médians, donne pour majorant des erreurs: $\frac{M_2}{12}.\frac{(b-a)^3}{n^2}$, justifier les performances relatives des trois méthodes

ANNEXE I 0 Majorant des erreurs pour la méthode du point médian (T.P.)

ENONCE



Soit f deux fois dérivable et ses dérivées continues sur [a,b]. Partageons cet intervalle en n intervalles partiels.

Soit $[x_k - h, x_k + h]$, $x_k = a + (2k-1)h$, $h = \dfrac{b-a}{2n}$, k variant de 1 à n. Sur chaque intervalle, l'erreur, en valeur absolue, commise en interpolant f par la fonction affine tangente en M_k, est notée : $e_k = \left|\int_{x_k-h}^{x_k+h} f(t)dt - 2hf(x_k)\right|$. Pour $x \in [0,h]$, on pose $R(x) = \int_{x_k-x}^{x_k+x} f(t)dt - 2xf(x_k)$

R(x) est l'erreur commise sur l'aire en interpolant f sur $[x_k - x, x_k + x]$ par la tangente à Cf au point d'abscisse x_k. L'objectif est de majorer $e_k = |R(h)|$.

1° Question Justifier l'existence d'un réel M_2 tel :

$\forall x \in [a,b]$, $|f''(x)| \le M_2$; M_2 est le plus petit des majorants de $|f''(x)|$ sur [a,b].

$$\text{On notera } M_2 = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

2° Question Utiliser l'inégalité des accroissement finis pour démontrer:

$$\forall x \in [0,h] \quad |f'(x_k + x) - f'(x_k - x)| \le 2M_2 x \quad (1)$$

3° Question Démontrer que la fonction R est deux fois dérivable sur [0,h], calculer R '(x), R "(x) Vérifier que R(0) = R '(0) = R "(0) = 0.

4°Question Démontrer: $\forall x \in [0,h] \quad |R''(x)| \le 2M_2 x \quad (2)$. En déduire:

$$\forall x \in [0,h] \quad |R(x)| \le \frac{M_2}{3} x^3 \ (3) \ \text{ et } |R(h)| \le \frac{M_2}{3} h^3 \ (4)$$

Nous énoncerons ce résultat par **le lemme** suivant: Soit f, fonction positive et de classe C^2 sur le segment $[\alpha,\beta]$ $\alpha<\beta$. On pose $\beta-\alpha=2h$ et $\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}$, alors

$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)dt-2hf(\gamma)\right|\le\frac{M_2}{3}h^3 \text{ où } M_2=\sup_{x\in[\alpha,\beta]}|f''(x)|.$$

5°Question_ En déduire le théorème suivant:

Théorème Soit la fonction f, positive, deux fois dérivable et ses dérivées continues sur [a,b]; on pose $M_2=\sup_{x\in[a,b]}|f''(x)|$ et I_M la somme des aires des n rectangles médians.

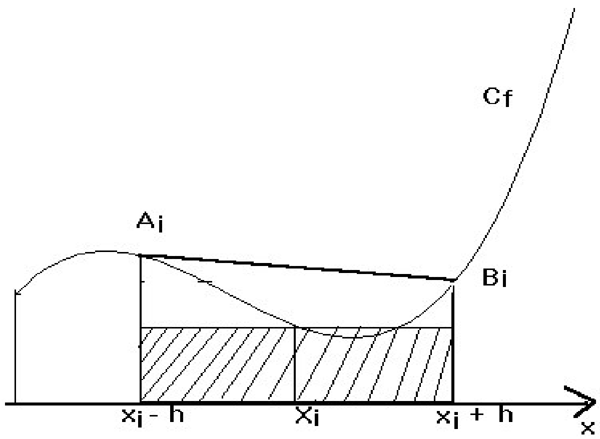
Alors un majorant de l'erreur est tel que: $\left|\int_a^b f(t)dt-I_M\right|\le M_2\frac{(b-a)^3}{24n^2}$.

ANNEXE 11 : METHODE DE SIMPSON

I Description du procédé. Remarque liminaire

Le principe de la méthode est l'interpolation de la fonction f, sur les intervalles partiels par des arcs de paraboles; sa réalisation nécessite la connaissance de la formule des trois niveaux. Sa performance, supérieure aux trois autres méthodes exposées dans ce texte, s'explique par le degré du polynôme d'interpolation, deux pour une fonction trinôme. Dans le cadre de la T.S. il n'est pas possible, en général, d'aborder la méthode pour des raisons de temps et de difficulté du calcul des majorants; l'inégalité des accroissement finis est toujours opératoire, mais il faut partir de la dérivée d'ordre 4 de f. Cependant l'aspect algorithmique est intéressant à mettre sous la forme d'un programme pou les élèves. Lorsqu'il est réalisé, démystifions: il est intéressant de lui faire constater que les machines qui calculent les intégrales ne font souvent qu'appliquer cette méthode car les résultats sont identiques. Enfin, pour ceux qui ne disposent pas encore de calculatrice donnant les valeurs, en général approchées, des intégrales, l'intérêt est évident[12]. Enfin, pour faire court, on peut remarquer que Simpson s'obtient en prenant le barycentre de l'aire des rectangles médians et des trapèzes, affectés des poids respectifs 2 et 1.

1) Description de la méthode



Les notations étant celles du C

$I_{M_k}=2hf(x_k)$ et

$I_{T_k}=h[f(x_k-h)+f(x_k+h)]$

sont des valeurs approchées de

$\int_{x_k-h}^{x_k+h}f(t)dt$. Donc

$I_k=\frac{1}{3}(2I_{M_k}+I_{T_k})$

est barycentre de I_{M_k} et I_{T_k} affectés de poids positifs.

[12] L'usage de la calculatrice, sans limitation de performance, reste posé en France, notamment lors des épreuves d'évaluation.

Ainsi $I_k \in \left[I_{T_k}, I_{M_k}\right]$ est une valeur approchée de $\int_{x_k-h}^{x_k+h} f(t)dt$.

$$I_k = \frac{h}{3}\left[f(x_k - h) + 4f(x_k) + f(x_k + h)\right]$$

avec $x_k = a + (2k-1)h$

En sommant les aires de ces n I_k, on obtient une valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$:

$I_S = I_1 + I_2 + \dots\dots\dots + I_n$.

$$\text{il vient;} I_S = \frac{h}{3}\sum_{k=1}^{n}\left[f(x_k - h) + 4f(x_k) + f(x_k + h)\right].$$

II Programmation et calculs approchés

a) A partir de l'organigramme ci-joint, ou d'un autre de votre initiative, réalisez un programme permettant de calculer I_S, une valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$.

b) b) Présenter, sous la forme d'un tableau, les valeurs approchées , pour n = 5, 10, 20;25, 50, des intégrales $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ et $\int_0^1 \frac{4dx}{1+x^2}$

c) Comparer ces résultats avec ceux obtenus avec les méthodes des rectangles, des tangentes et des trapèzes. Que constatez vous pour la méthode de Simpson?

Remarques et conclusion de l'étude.

Il est intéressant de donner aux élèves, à la suite de ces calculs, le majorant habituel de cette méthode: $M_4 \frac{(b-a)^5}{2880n^4}$; $M_4 = \sup_{x\in[a,b]}\left|f^{iV}(x)\right|$. Ce majorant lui permet de trouver une explication aux performances des différentes méthodes.

- Pour les rectangles le majorant est en $\frac{1}{n}$ alors que le polynôme d'interpolation est de degré 0, une constante.
- Pour le point médian et les trapèzes le majorant est respectivement en $\frac{1}{24n^2}$ et $\frac{1}{12n^2}$; dans les deux cas le polynôme d'interpolation est de degré 1.
- Enfin , pour Simpson, on a admis: le majorant en $\frac{1}{n^4}$, et le degré du polynôme d'interpolation est 2 (un arc de parabole).

CONCLUSION

Ainsi, les facteurs en jeu qui déterminent la pertinence de la méthode, apparaissent clairement. Outre le nombre d'intervalles partiels, s'impose le degré du polynôme d'interpolation sur chaque intervalle partiel.

METHODE SIMPSON

DEBUT

ENTRER f, A, B, N

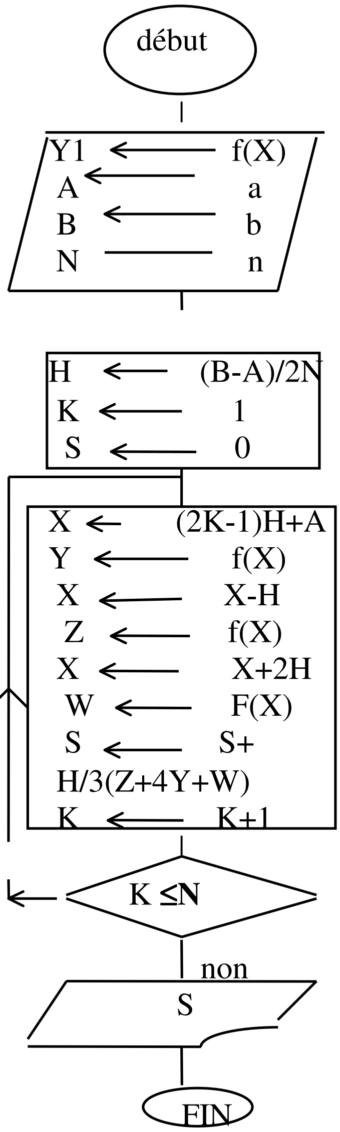
Faire (B-A)/2N va dans H
Faire 1 va dans K
Faire 0 va dans S

répéter
- Faire (2K-1)H+A ds X
- Faire Y1=f(X) dans Y
- Faire X-H va dans X
- Faire f(X) va dans Z
- Faire X+2H va dans X
- Faire f(X) va dans W
- Faire S+H/3(Z +4Y+W) va dans S
- Faire K+1 va dans K

JUSQUE K > N

Ecrire S

FIN



PRGM SIMPSON(TI80)

```
:LBL0
:DISP" A=,B=, N="
: INPUT A
: INPUT B
: INPUT N
:(B-A)÷2N  →  H
: 1 →  K
: 0 →  S
: LBL1
:(2K-1)H+A  →  X
:Y1  →  Y
: X-H  →  X
: Y1  →  Z
: X+2H  →  X
: Y1  →  W
: S+H÷3(Z+4Y+W)  →  S
: K+1  →  K
: IF K≤N
: GOTO 1
: DISP" S = "
: DISP S
: PAUSE
: GOTO 0
```

Fonctionnement: Sur TI80, 81, 82, la fonction f (ici $f(x) = \frac{1}{x}$ ou e^{-x^2} ou $\frac{1}{1+x^2}$) est stockée en Y1 ou Y2.....Lorsque X est affiché, Y1 donne f(X).

Sur Casio, la fonction est stockée en mémoire fonction f_1 ou f_2 ....