CHAPITRE VI

ACCELERATION DE CONVERGENCE

1° Partie Méthode du point fixe

2° Partie Méthode de Newton-Raphson

PREAMBULE a la Méthode du point fixe.

Dans les premiers chapitres de cette étude, nous avons trouvé des conditions suffisantes d'existence des zéros d'une fonction par le théorème de Bolzano. Puis nous avons approché ces zéros par dichotomie, en remarquant la lenteur relative du procédé.
En début du chapitre IV, la mise en place sommaire de la méthode du point fixe sur deux exemples nous a montré la force de celle-ci : sa rapidité de convergence. Mais nous avons remarqué sur le second exemple qu'elle ne fonctionne pas toujours, lorsque le point fixe est "répulsif ". D'autres méthodes, comme celle de Newton-Raphson peuvent résoudre le problème. Pour justifier, tout au moins partiellement, ces différentes méthodes d'approche d'un zéro nous avons développé de nouveaux résultats du calcul différentiel au chapitre précédent. Toute fois il n'est pas question de traiter avec des débutants tous les théorèmes d'existence et d'unicité relatifs à ces questions qui sont parmi les plus importantes en Analyse.

1) Dans le développement qui suit, nous recherchons des conditions suffisantes pour que le procédé du point fixe donne une suite (u_n) qui converge vers α, le zéro que l'on désire approcher.

Donc dans ce chapitre, nous supposerons:

a) que α solution de l'équation $\varphi(x) = 0$ a pu être isolée dans un intervalle [a,b].

b) que l'équation $\varphi(x) = 0$ équivaut à $f(x) = x$ où f est dérivable sur [a,b]. Donc α est un point fixe de f.

c) enfin, nous utiliserons les nouveaux acquis du chapitre IV dont " l'inégalité des accroissements finis".

2) Lorsque la suite récurrente converge vers α nous essaierons de déterminer ou conjecturer ce qui commande la rapidité de cette convergence. Enfin, pour les valeurs approchées décimales de α, nous rechercherons un majorant de l'erreur, comme il se doit dans tout procédé d'approximation.

I PROBLEME : EXISTENCE D'UN POINT FIXE ET SON APPROCHE SUR QUELQUES CAS PARTICULIERS. (éléments de solution en annexe 5)

-A- Existence d'un point fixe.

On suppose f définie et continue sur le segment I = [a,b], et de plus, $f(I)\subset I$, c'est à dire pour tout x de I, f(x) appartient à I. Dans ce cas on dira que I est stable par f.

Démontrer que f admet alors au moins un point fixe α appartenant au segment [a,b]. On utilisera la fonction φ: $x \to f(x) - x$_ définie sur I. Enoncer le résultat sous la forme d'un lemme. (**le lemme1**)

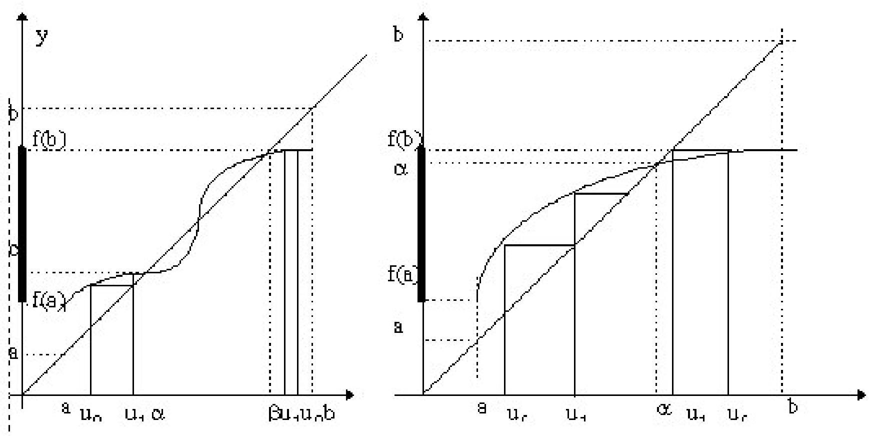
-B- f est croissante sur l'intervalle [a,b]

Les hypothèses sur la fonction f étant celles du **lemme 1** ci-dessus avec, de plus, **f est croissante** sur I, on définit la suite(u_n) par $u_0 \in [a,b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Démontrer que $\forall n \in N$, $u_n \in I$ ainsi, (u_n)est définie sur N.

b) On suppose$u_1 \geq u_0$; démontrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, point fixe de f sur I.

c) On suppose$u_1 \leq u_0$; démontrer que (u_n) converge vers un réel ℓ', point fixe de f sur I. Ainsi, dans tous les cas, la suite (u_n) converge vers un point fixe de f.



Itération en escalier montant (vers α) et descendant (vers β)

Cas de figure d'un point fixe unique de f sur [a,b]

-C- f est décroissante sur [a,b]

Les hypothèses sur f restant celles du **lemme1**, cette fois **f est décroissante** sur I = [a,b].

1°question. Démontrer que $f \circ f$ est croissante sur I et que $f \circ f(I) \subset I$, c'est à dire que I est stable par $f \circ f$.

2°question. Démontrer que f admet un point fixe unique $\alpha \in$ I.

3°question. Soit (u_n) définie par : $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Démontrer que $\forall n \in N$, $u_n \in I$. Ainsi (u_n) est définie sur N.

b) On considère la suite des termes de rangs pairs, extraite de (u_n).Soit: $u_0, u_2, \ldots, u_{2p}, u_{2p+2}, \ldots$que l'on note (u_{2n}).

De même soit la suite des termes de rangs impairs extraite de (u_n).

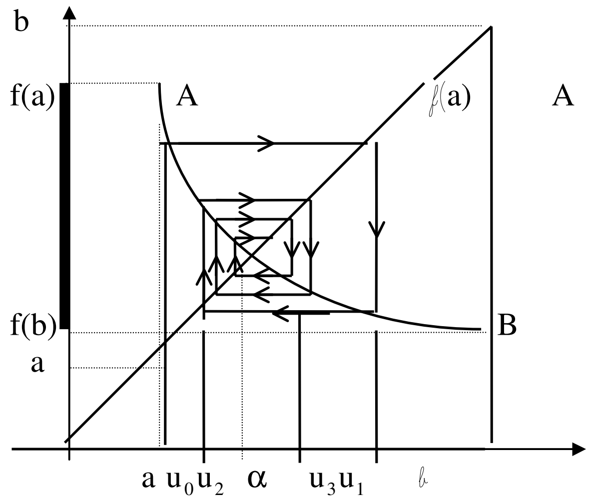
Soit:$u_1, u_3, \ldots u_{2p+1}, u_{2p+3}, \ldots$que l'on note (u_{2n+1}).

On suppose $u_0 < \alpha$ et $u_0 \leq u_2$. Démontrer que la suite (u_{2n}) converge vers ℓ, point fixe de $f \circ f$.

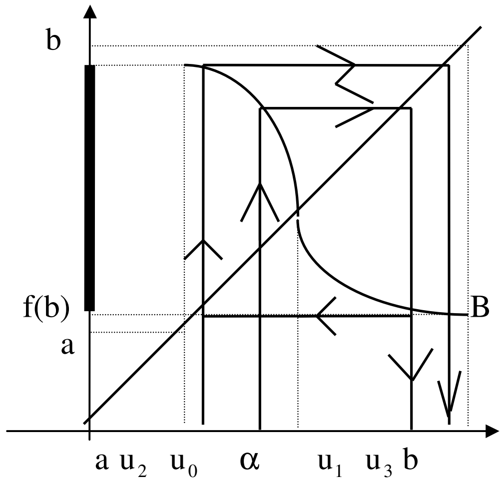
De même démontrer que la suite (u_{2n+1}) converge vers ℓ' également point fixe de $f \circ f$ sur I.

c) Reprendre la même question sachant que $\alpha < u_0$ et $u_2 \leq u_0$.

4°question. Quelle propriété manque-t-il aux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) pour qu'elles convergent vers le mêm réel α. Que peut-on conclure alors pour la suite (u_n) ?



Spirale convergente
$u_0 < \alpha$ et $u_0 \le u_2$



Spirale divergente

-D- Conditions suffisantes de convergence vers le point fixe unique α d'une fonction non monotone .

Les hypothèses sont $\begin{cases} f \text{ continue sur } I=[a,b] \quad (1) \\ f(I) \subset I \quad (2) \\ f' \text{ existe sur } I \text{ et il existe } k \in \left]0,1\right[\text{ tel que } \forall x \in I \ |f'(x)| \le k \quad (3). \end{cases}$

Ici f n'est donc plus supposée monotone sur [a,b].

1°question. a) Démontrer que f admet au moins un point fixe sur [a,b] (cf A. lemme 1)
b) Démontrer que ce point fixe est unique. On le note α. On utilisera, en raisonnant par l'absurde, l'inégalité des accroissements finis.

2°question. a) Soit la suite définie par $u_0 \in I$, et $\forall n \in N \ u_{n+1} = f(u_n)$; démontrer que tous les termes de (u_n) appartiennent à I, ainsi la suite est définie sur N.
b) Démontrer que: $\forall n \in N$, $|u_{n+1} - \alpha| \le k|u_n - \alpha|$ (i)
c) En déduire: $\forall n \in N$, $|u_n - \alpha| \le k^n |u_0 - \alpha|$ (ii)

En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

3°question. Utiliser la relation (ii) pour conjecturer ce qui gouverne la rapidité de la convergence de la suite (u_n).

REMARQUE .

Nous avons constaté au chapitre V que l'approche de la solution α de l'équation $x \in R \ x^3 + 3x - 1 = 0$ (1) peut se ramener à l'équation à point fixe $\sqrt[3]{1-3x} = x$. Le calcul des premiers termes de la suite laisse à penser que le point fixe n'est pas attractif, c'est à dire la suite construite par itération à partir de $\sqrt[3]{1-3x} = x$ ne converge pas vers α . Le procédé n'est donc pas toujours possible, nous chercherons dans la suite à trouver des conditions suffisantes de convergence et le développement d'une autre méthodes d'approche. Pour l'instant indiquons une méthode simple adaptée à l'exemple ci-dessus.

II ETUDE SUR UN EXEMPLE : COMMENT RENDRE ATTRACTIF UN POINT FIXE REPULSIF. ?

Reprenons l'équation $x \in R\ x^3 + 3x - 1 = 0$ (1) équivalente sur [o;1/3] à $\sqrt[3]{1-3x} = x$. La méthode ne marche pas comme nous l'avons constaté au chapitre V (1° partie , exemple2).

EXERCICE

1°) Soit l'équation : $x \in R\ x^3 + 3x - 1 = 0$ (1). Démontrer que (1) admet une solution unique $\alpha \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$. **2°)** On pose pour tout réel $\lambda > 0, \varphi(x) = x - \lambda f(x)$ ou $f(x) = x^3 + 3x - 1$; Démontrer que α est point fixe de φ sur $\left[0, \frac{1}{3}\right]$. **3°)** Déterminer la valeur du réel λ pour que $\varphi'(\frac{1}{3}) = 0$

4°) Prouver qu'in existe un réel $k : \forall x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]\ |\varphi'(x)| \le k$, $k \in]0,1[$.

5°) Montrer que la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in N\ u_{n+1} = \varphi(u_n)$ converge vers α

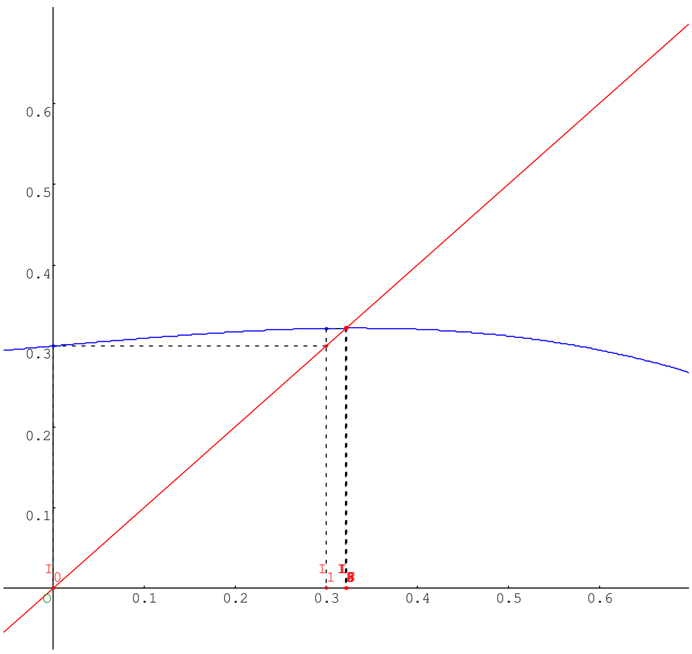
Eléments de solution de l'exercice

1°) f est continue et strictement croissante sur R , de plus f(0)f(1/3) < 0. 2°) $\varphi(\alpha) = \alpha - \lambda f(\alpha) = \alpha - \lambda.0 = \alpha$. $\varphi(x) = 1 - \lambda(x^3 + 3x - 1)$; $\varphi'(x) = -3\lambda x^2 - 3\lambda + 1$

$\varphi'(\frac{1}{3}) = 0 \iff \lambda = \frac{3}{10}$.4°) Soit $\varphi(x) = -\frac{3}{10}x^3 + \frac{1}{10}x + \frac{3}{10}$, $\varphi'(x) = -\frac{9}{10}x^2 + \frac{1}{10}$

φ' est décroissante et positive sur $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, donc $k = \varphi'(0) = \frac{1}{10}$.

5°) On pose k=1/10 , 0 < k< 1 , l'inégalité des accroissements finis conduit pour la suite récurrente définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in N\ u_{n+1} = \varphi(u_n)$ à $|u_n - \alpha| \le \frac{1}{3}(\frac{1}{10})^n$. La



suite $(u_n - \alpha)$ dominée par une suite géométrique de raison 1/10 converge donc très rapidement vers 0. Ainsi (u_n) converge vers α. En utilisant le programme écrit à l'annexe 3 du chapitre V on trouve : $u_4 = 0{,}322185$. Plus généralement, pour tout entier n, u_n est une V. A. décimale de α avec la précision $\frac{1}{3}(\frac{1}{10})^n$.

Annexe 5 : Eléments de solution du problème du point fixe (I Chapitre VI)

-A -

$\varphi(a) = f(a) - a$ et $a \leq f(a) \leq b$ donc $\varphi(a) \geq 0$

$\varphi(a) = f(a) - a$ et $a \leq f(a) \leq b$ donc $\varphi(a) \geq 0 \varphi(b) = f(b) - b$ donc $\varphi(b) \leq 0$

φ est continue sur [a,b] , le théorème des valeurs intermédiaires assure que $0 \in [\varphi(b), \varphi(a)]$ admet au moins un antécédent α par φ dans [a,b) .Donc il existe au moins un réel $\alpha \in [a, b]$ tel que : $\varphi(\alpha) = 0$, soit $f(\alpha) = \alpha$.

-B-

Si f est croissante sur [a,b]_ a)$u_0 \in I$, $p \in N$, $u_p \in I$, $f(u_p) \in f(I)$; donc $u_{p+1} \in I$.

b)$u_1 \geq u_0$, p fixé , $u_p \geq u_{p-1}$, f croissante donc $f(u_p) \geq f(u_{p-1})$,donc $u_{p+1} \geq u_p$; ainsi par récurrence sur l'entier n, (u_n) est croissante et de plus majorée par b , puisque tous les $u_n \in I$. Elle converge vers un réel ℓ de l'intervalle I .

Soit la suite (u_n) et la suite image$(f(u_n))$, elles ne diffèrent que par le premier terme ; la seconde converge donc également vers ℓ. La fonction f étant continue en ℓ, par composition des limites : $\ell = f(\ell)$. c) idem

-C- Si f est décroissante sur [a,b]

1°) Soit $x' < x'' \Rightarrow f(x'') \leq f(x') \Rightarrow f \circ f(x') \leq f \circ f(x'')$; ainsi $f \circ f$ est croissante sur I .

2°) Les hypothèses du **lemme 1** étant réalisées, f admet au moins un point fixe $\alpha \in I$.

Supposons $\alpha < \beta$ et β un autre point fixe de f sur I. Alors , f décroissante entraîne $f(\alpha) \geq f(\beta)$; soit $\alpha \geq \beta$. Ceci est contradictoire avec l'hypothèse faite .

Le point fixe $\alpha \in I$ est donc unique .

3°) a) $f(I) \subset I$, donc $\forall n \in N, u_n \in I$. b) Soit la suite extraite (u_{2n}) ,considérer $f \circ f$ et voir B,c ; alors cette suite croissante et majorée converge vers $\ell < \alpha$. La démonstration est analogue pour la suite (u_{2n+1}) qui converge vers ℓ'. Il vient donc : $\forall n \in N, u_{2n} \leq \ell \leq \alpha \leq \ell' \leq u_{2n+1}$ (i).

c) la démonstration est identique, il vient : $u_{2n+1} \leq l' \leq \alpha \leq l \leq u_{2n}$ (ii)

4°) Dans les hypothèses de la 3° question , si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont la même limite α , elles sont nécessairement adjacentes . L'hypothèse manquante est donc : $\lim_{n\to\infty}(u_{2n+1} - u_{2n}) = 0$.

-D- rapidité de convergence

1°) a) voir le **lemme1.**

b) si f admet deux points fixes sur I ,l'inégalité des accroissement finis donne :$|f(\alpha) - f(\beta)| \leq k|\alpha - \beta| < |\alpha - \beta|$, car $k \in]0,1[$; donc $|\alpha - \beta| < |\alpha - \beta|$, ce qui est impossible ,d'ou l'unicité. 2°) solution classique : on peut raisonner par récurrence sur l'entier n pour démontrer l'inégalité. 3°) la suite géométrique (k^n)converge d'autant plus vite que k est proche de 0. c'est le majorant de $|f'(x)|$ pour $x \in [a, b]$, qui assure une plus ou moins grande rapidité de convergence .

Remarque. Le paragraphe D nous fournit des conditions suffisantes de convergence de la suite récurrente; elles sont très fortes puisqu'elles majorent l'erreur $|u_n - \alpha|$ par un terme en k^n .On dira que la convergence de $(u_n - \alpha)$ est en k^n .

Annexe 6 ELEMENTS THEORIQUES SUR LE POINT FIXE.

Supposons que f soit continue sur l'intervalle I de R, et f(I) inclus dans I. On veut savoir s'il existe un point fixe α de I te que $f(\alpha) = \alpha$, ensuite si la suite récurrente définie par u_0 et $\forall n \in N$ $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α ; c'est à dire " ce point fixe est-il attractif on répulsif ?". Enfin peut-on maîtriser l'erreur commise en remplaçant α par u_n ?

Sans viser un développement complet de la question, essayons d'expliciter certains résultats qui paraissent accessibles au débutant en analyse.

Propriété 1. Si f est une fonction continue d'un segment[1] I = [a, b] sur lui même **Alors** elle admet au moins un point fixe.

En effet la fonction définie sur I par g(x) = f(x)-x vérifient les hypothèses du théorème de Bolzano (chapitre IV) : g continue sur I, g(a) = f(a)-a > 0 car fa) appartient à I ; de même g(b) = f(b) -b < 0. Donc il existe au moins un réel α de I tel que g(α) = 0, c'est à dire f(α) = α.

Propriété 2. Si f est une fonction d'un intervalle fermé I dans lui même et k- lipschitzienne (c'est à dire pour tout a et b de I $|f(b)-f(a)|\leq k|b-a|$) avec $k < 1$. On dit que f est k-contractente, **Alors :**

--- f admet un point fixe unique α sur l'intervalle I.

--- Pour tout élément c de I la suite récurrente définie par $u_0 = c$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α

---- et pour tout entier m $|u_m - \alpha| \leq \dfrac{k^m}{1-k}|u_1 - u_0|$ (1)

a) L'unicité du point fixe résulte de la considération de deux points fixes α et β de I : alors $|\beta-\alpha| \leq k|\beta-\alpha|$ donc $k \geq 1$ ce qui est contradictoire.

b) L'existence du point fixe et la convergence de (u_n) suppose connu le critère de convergence de Cauchy (cf Chapitre II). Supposons les entiers m et n tels que m < n

$|u_n - u_m| \leq |u_{m+1} - u_m| + |u_m - u_{m-1}| + \ldots\ldots + |u_n - u_{n-1}|$

Majorons chaque terme du second membre en utilisant la propriété contractante de f :

$|u_2 - u_1| \leq k|u_1 - u_0|$

$|u_3 - u_2| \leq k|u_2 - u_1|$

.

. En multipliant membre à membre les m inégalités , il vient :

$|u_{m+1} - u_m| \leq k|u_m - u_{m-1}|$

$|u_{m+1} - u_m| \leq k^m|u_1 - u_0|$

Pour la somme des termes du second membre, il vient alors :

$$|u_m - u_n| \leq |u_1 - u_0|(k^{n-1} + k^{n-2} + \ldots\ldots k^m)$$
$$\leq k^m(1 + k + k^2 + \ldots\ldots k^{n-m-1})|u_1 - u_0|$$
$$\leq k^m \frac{(1-k^{n-m})}{1-k}|u_1 - u_0| \leq |u_1 - u_0|\frac{k^m}{1-k}$$

Puisque k < 1 assure la converge vers zéro du second membre : pour tout entier r donné il existe un entier N tel que si $m > N$ alors $|u_1 - u_0|\dfrac{k^m}{1-k} \leq 10^{-r}$. Lorsque m et n sont supérieurs à N alors $|u_m - u_n| \leq 10^{-r}$; ce qui assure que la suite (u_n) est de Cauchy, donc converge vers un réel ℓ.

---

[1] L'intervalle I de R doit être compact, sinon s'il est seulement fermé il n'y a pas nécessairement de point fixe : ainsi f définie sur [0, ∞[par f(x) = x+2 n'a pas de point fixe.

c) puisque I est un intervalle fermé de R, la limite ℓ appartient à I. La fonction f est continue sur I puisque k-lipschitzienne sur I donc en passant à la limite dans le relation $u_{n+1} = f(u_n)$, il vient $\ell = f(\ell)$: $\ell = \alpha$ est un point fixe de f.

Interprétations de la propriété 2

a) La relation (1) indique que la convergence de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ est au moins géométrique et dépend du réel k : plus k est proche de zéro, plus la convergence est rapide.

b) Cette même relation, lorsque f est de classe C^1 sur I (dérivable et sa dérivée continue sur I) et donc sa dérivée est bornée ; le théorème des accroissements finis montre que f est k- lipschitzienne dans le rapport $k = \sup_{x\in I}|f'(x)|$. Ainsi on retrouve ce que nous avons observé, c'est le coefficient directeur de la tangente qui va donner la rapidité de convergence. Nous avons remarqué que dans l'exemple II du paragraphe précédent

$$x \in [0; 0{,}33] \;\; x^3 + 3x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow x \in [0; 0{,}33] \;\; \sqrt[3]{1-3x} = x = \varphi(x)$$

que l'itération avec φ ne fournit pas une suite convergente ; autrement dit le calcul montre que le point fixe α de la fonction φ n'est pas "attractif" mais "répulsif". Pourquoi? On a remarqué alors que φ n'est pas contractante sur l'intervalle [0; 0,33]. Il faut statuer dans ce cas

Propriété 3. Si f est une fonction de l'intervalle I dans lui même et de classe C^1 sur I. et admettant un point fixe unique α sur I.

a) **Si** $0 < |f'(\alpha)| < 1$. **ALORS** le point α est attractif.

b) **Si** $|f'(\alpha)| > 1$, **ALORS** le point α est répulsif .

Nous écartons ici les cas $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ ou -1.

La continuité de f ' entraîne celle de $|f'|$. Donc en α $|f'(x)|$ est une V. A. de $|f'(\alpha)|$ avec une prècision donnée (10^{-m} par exemple) à condition que x soit une V.A. de α avec une certaine précision (10^{-p} avec p dépendant de m). en d'autre termes : si x appartient à l'intervalle fermé J = $[\alpha - 10^{-p}; \alpha + 10^{-p}]$ alors $|f'(\alpha)| - 10^{-m} \le |f'(x)| \le |f'(\alpha)| + 10^{-m}$. Il est possible de choisir 10^{-m} de façon que $|f'(\alpha)| + 10^{-m} < 1$. Alors $\sup_{x\in J}|f'(x)| = k$ et k<1.

L'inégalité des accroissements finis pour f sur l'intervalle J entraîne pour tout réel x de J : $|f(x) - f(\alpha)| \le k|x - \alpha|$. Les hypothèses de la propriété 2 étant réunies, la suite récurrente définie par " pour tout réel c de J par $u_0 = c$ et $u_{n+1} = f(u_n)$" converge vers α. Le point α est attractif.

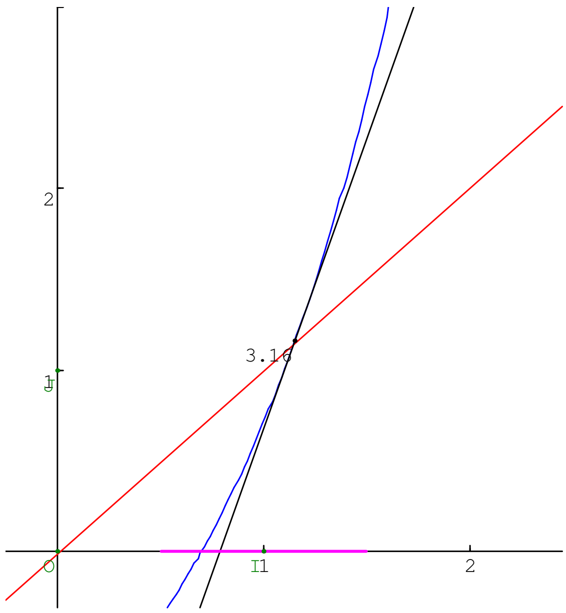
b) Si par contre $|f'(\alpha)| > 1$, par exemple f '(α) >1.

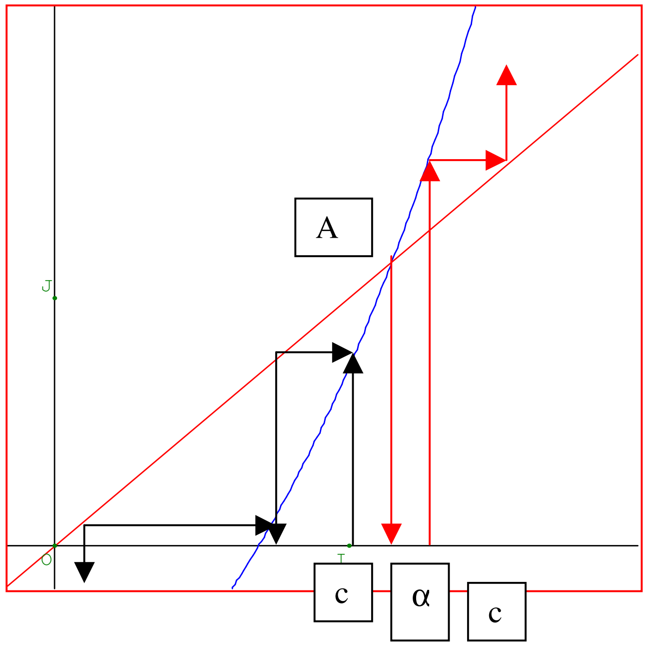
La continuité de f ' en α signifie que f '(x) peut être une V. A. de f '(α) avec une précision donnée (10^{-m} par exemple) à condition que x soit une V.A. de α avec une certaine précision (10^{-p} avec p dépendant de m). En d'autre termes : il existe un l'intervalle fermé J = $[\alpha - 10^{-p}; \alpha + 10^{-p}]$ tel sur J on ait $f'(\alpha) - 10^{-m} \le f'(x) \le f'(\alpha) + 10^{-m}$. Puisque f '($\alpha$) > 1 on choisit m tel que sur J, f '(α)-$10^{-m} \ge 1$, ainsi f '(x)$\ge$1 sut J. Alors démontrons par l'absurde que la suite récurrente définie par $u_0 = c$, $c \in J$ mais $c \ne \alpha$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ ne converge pas vers α. Si elle converge vers α tous les termes de la suite sont dans l'intervalle J centré en α.

Si $u_0 = c > \alpha$. f '> o sur J donc f est strictement croissante sur J et le taux d'accroissement $\dfrac{f(c) - f(\alpha)}{c - \alpha} > 0 \Rightarrow u_1 - \alpha > u_0 - \alpha \Rightarrow u_1 > u_0$. Par récurrence sur l'entier n : puisque f est strictement croissante sur J ; si $u_n > u_{n-1} \Rightarrow f(u_n) > f(u_{n-1})$ donc $u_{n+1} > u_n$.

La suite (u_n) est ainsi strictement croissante et majorée sur le segment J donc converge vers un réel ℓ de J qui vérifie $\ell > u_0 > \alpha$. Donc $\ell \ne \alpha$ et de plus f(ℓ) = ℓ, d'où la contradiction

Si $u_0 = c < \alpha$, on démontre de même que la suite est décroissante et converge vers ℓ de J vérifiant $\ell < c < \alpha$; d'où la contradiction.
Dans l'exemple ci-dessous : exp(x)-2 = x admet un point fixe unique sur I =[0,5 ;1,5]. Sur cet intervalle, la fonction dérivée exp(x) est > 1 ; en particulier en α. Quelque soit la valeur de c appartenant à I et différent de α, on peut constater graphiquement que la suite ne converge pas. On dit qu'elle est en escalier descendant ou montant suivant que c < α ou c >α.





on constate sur la figure que le coefficient directeur de la tangente en A(α, f(α)) est voisin de 3,16.Si l'on poursuit les calculs à partir de c < α, on constate que la suite converge vers un autre point fixe de g(x) = exp(x)-2 dont une valeur approchée est -1,8 : c'est le résultat prévu dans le raisonnement par l'absurde.
De même : $x \in [0;0{,}33]\ x^3 + 3x - 1 = 0$ (i) $\Leftrightarrow x \in [0;0{,}33]\ \sqrt[3]{1-3x} = x = \varphi(x)$
Nous avons constaté que l'équation (i) ci-dessus a une solution unique α, point fixe de φ. Mais la méthode du point fixe ne fournit pas une suite convergente. En adaptant la méthode nous avons prouvé que 0,322185 est une V.A. de α . Quel est le comportement de φ '?

$x \in [0;0{,}33]\ |\varphi'(x)| = \dfrac{\frac{1}{3}}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}$; nous constatons que $|\varphi'(0{,}32)| \approx 3$, donc $|\varphi'(\alpha)| > 1$, ce qui justifie que le point fixe α est répulsif.
En conclusion, c'est bien la valeur de la dérivée au point fixe qui décide de la convergence de la suite récurrente.

2° Partie Méthode de Newton- Raphson

I Principe de la méthode des tangentes.

Lorsque la méthode du point fixe précédente ne marche pas (comme dans l'exercice2 du chapitre IV), c'est à dire donne une itération qui ne converge pas vers α, ou qui est trop lente, il est nécessaire d'envisager d'autres méthodes d'approches du réel α. Voici la méthode des tangentes dite " de Newton- Raphson" . Cette méthode linéarise par le calcul différentiel une équation du type h(x) =0 où h est une fonction de classe C^1 sur un segment I de R et admettant un zéro unique α de I.

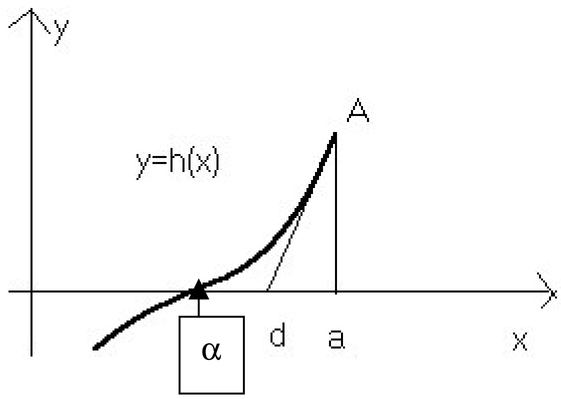
On suppose que l'on a trouvé par dichotomie ou un autre moyen une V.A. a de α avec une certaine précision. La dérivabilité de h en a se traduit par la relation : Il existe une fonction ε telle que : $\forall x \in I \;\; h(x) = h(a) + (x-a)h'(a) + (x-a)\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ (1)[1]

Dans la relation (1), si $x = \alpha$: $h(\alpha) = h(a)+(\alpha-a)h'(a) + (\alpha-a)\varepsilon(\alpha) = 0$.

Si a est suffisamment voisin de α, le reste $(\alpha-a)\varepsilon(\alpha)$ est négligeable et l'équation linéaire $h(a) + (x - a)h'(a) = 0$ est une "équation linéaire approchée" de h(x) = 0 ; c'est à dire sa solution unique est une V.A. de α.

Eclairage géométrique. Cas où h est croissante et convexe au voisinage de α.

La fonction affine tangente : $x \to h(a) + (x-a)h'(a)$ a pour courbe représentative la tangente (AT) en A(a, h (a)) à la courbe C_h. Si la h est strictement croissante sur I et si h est convexe sur I, la figure ci-dessous montre que la tangente (AT) va couper Ox en un point d'abscisse d compris entre α et a, donc d est une meilleure approximation de α.



Construction de la suite qui doit converger vers α

Puisque h est dérivable en a, C_h admet en A(a, h (a)) une tangente (AT) de coefficient h '(a) qui coupe x'Ox en d. Alors d est une valeur approchée de α meilleure que a , L'équation de la tangente en A à C_h s'écrit : y- h(a) = h '(a)(x-a). Pour y = o, si h' ne s'annule pas sur I, il vient donc pour définir le réel d : -h(a) = h'(a) (d-a) donc $d = a - \dfrac{h(a)}{h'(a)}$.

Si cet procédé peut continuer, on définit une suite (u_n) par : $u_0 = a$ et $u_{n+1} = u_n - \dfrac{h(u_n)}{h'(u_n)}$ qui **devrait** converger vers α . Remarquons que la fonction g définie sur I par $g(x) = x - \dfrac{h(x)}{h'(x)}$ vérifie $g'(\alpha)=0$.

Nous admettons en première lecture l'énoncé suivant :

---

[1] Cette définition de la dérivabilité en un point est déjà connue au Lycée en classe de 1°

Théorème " **Si** h est de classe C^2 sur le segment I = [u , v] est telle que :

a) h(u) < 0 et h(v) > 0

b) h'(x) > 0 sur [u , v], h est donc strictement croissante.

c) h " (x) > 0 sur [u , v], h est concave

Alors il existe un réel unique α de [u,v] tel que $h(\alpha) = 0$

La fonction g définie sur [u,v] par $g(x)= x - \dfrac{h(x)}{h'(x)}$ est de classe C^1 sur [u, v] et $g(I) \subset I$ Le réel α est un point fixe unique de g et $g'(\alpha)=0$.

Enfin pour tout réel a de [u, v] la suite (u_n) converge vers α"

Il est aisé d'adapter l'énoncé au cas d'une fonction décroissante

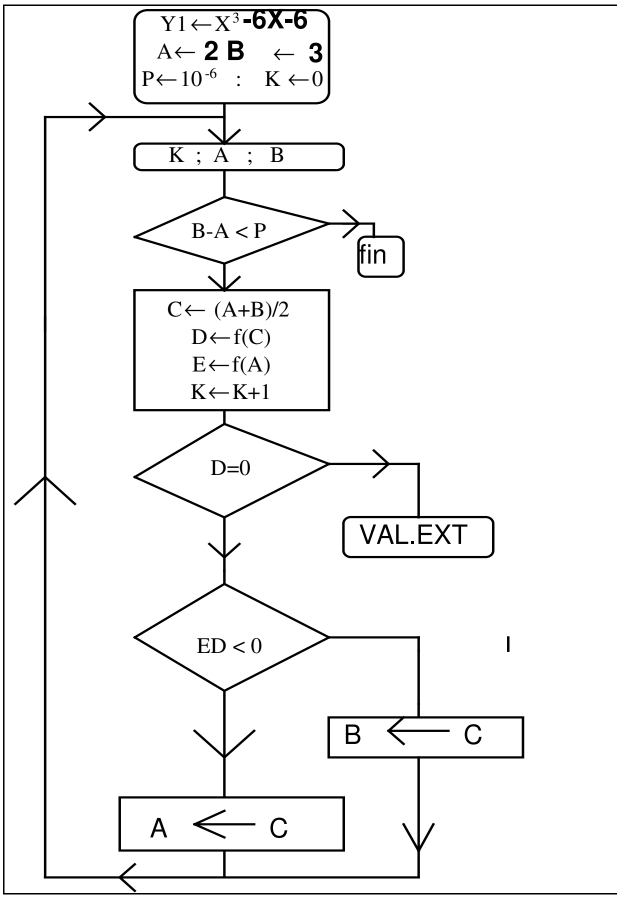
II COMPARAISON DES TROIS METHODES SUR DEUX EXEMPLES

EXEMPLE I

Nous avons montré dans l'Annexe3 du chapitre IV que l'équation (1) admet sur R une solution unique α[1] , isolée dans l'intervalle [2,3]

$x \in [2,3]$ $f(x) = x^3 - 6x - 6 = 0$ (1) $\Leftrightarrow x^3 = 6x + 6$

DICHOTOMIE En utilisant le programme sur calculatrice développé au chapitre IV, l'initialisation est ainsi modifiée : $X^3 - 6X - 6 \rightarrow Y1$, $A = 2$, $B = 3$ et $P = 10^{-6}$,



- Initialisation des données

Entre f(x), a , b et la précision souhaitée P = 10^{-9}.et le rang k = 0

- Afficher k, a_k et b_k
- Si $b_k - a_k < 10^{-9}$ **FIN**
- Sinon faire :

$(a_k + b_k)/2$ va dans c

f(c) va dans d

f (a) va dans e

k+1 va dans k

- Si d = o : d est la valeur de α

qui est donc un rationnel

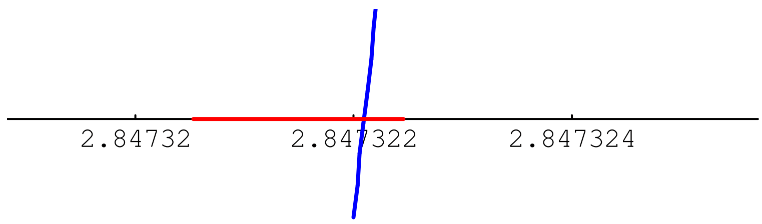
- sinon si ed < 0 faire c va dans a_k
- sinon c va dans b_k

Puis faire : recommencer la séquence à partir d" Afficher k, a_k et b_k"

[1] Ce réel est un irrationel car dans le cas contraire, en posant $\alpha = \dfrac{p}{q}$ où p et q sont premiers entre eux, on a $p^3 = 6pq^2 - 6q^3$, donc q divise p ce qui est contradictoire.

0	2	3
1	2,5	3
2	2,75	3
3	2,75	2,875
4	2,8125	2,875
5	2,84375	2,875
6	2,84375	2,859375
7	2,84375	2,8515625
8	2,84375	2,84765625
9	2,845703125	2,84765625
10	2,8466796875	2,84765625
11	2,84716796875	2,84765625
12	2,84716796875	2,847412109375
13	2,8472900390625	2,847412109375
14	2,8472900390625	2,84735107421875
15	2,84732055664063	2,84735107421875
16	2,84732055664063	2,84733581542969
17	2,84732055664063	2,84732818603516
18	2,84732055664063	2,84732437133789
19	2,84732055664063	2,84732246398926
20	2,84732151031494	2,84732246398926

Apres 20 dichotomies, on obtient les V.A. ci-dessus pour (a_n) et (b_n).
Eclairage graphique : l' intervalle contenant α, après 15 dichotomies, est le suivant (en trait foncé)

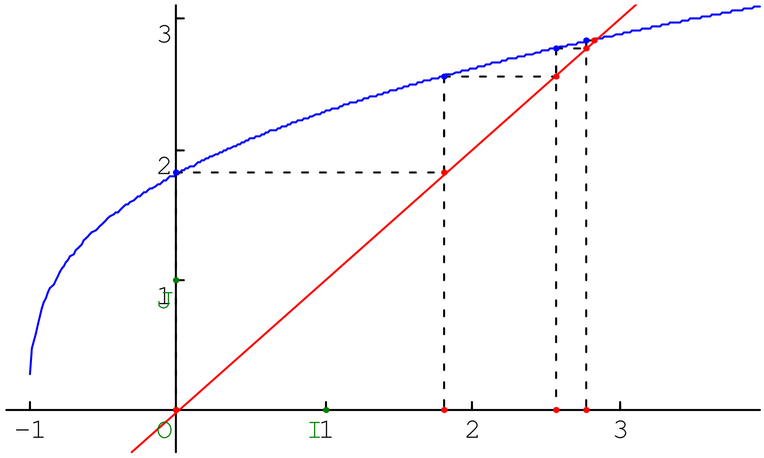


Après 20 dichotomies, on a : 2,84732151031494< α < 2,84732246398926 qui donne des V.A. par défaut et par excès de α à 10^{-6} près. La justification est simple puisque le dernier intervalle a pour longueur $\frac{1}{2^{20}} \approx 9{,}5368\times10^{-7} < 10^{-6}$. Quant à la vitesse de convergence : les suites a_n et b_n sont telles que $|a_n - \alpha| \le \frac{1}{2^n}$ et $|b_n - \alpha| \le \frac{1}{2^n}$ Elles ont donc une convergence géométrique vers α en $(0{,}5)^n$.

METHODE DU POINT FIXE

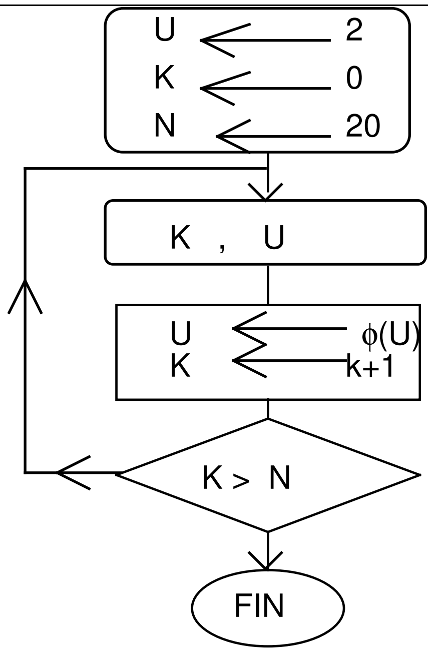
$x \in [2,3]$ $x^3 - 6x - 6 = 0$ (1) $\Leftrightarrow$ $x^3 = 6x + 6$ sur $I = [2,3]$ 6x+x > 0 donc l'équation équivaut sur I à: $x = \sqrt[3]{6x+6} = \varphi(x)$. C'est à dire $x \in [2,3]$ $\varphi(x) = x$; Ceci montre que $\alpha \in]2,3[$ est l'unique point fixe de la fonction φ sur cet intervalle.

$\varphi'(x) = \dfrac{6}{\sqrt[3]{(6x+6)^2}}$ est positive et strictement décroissante sur I. Donc M $=\varphi'(2) \approx 0{,}874$ est un majorant de la dérivée sur I. La suite (u_n): $u_0 = 2$ et $\forall n \in N$ $u_{n+1} = \sqrt[3]{(6u_n + 6)}$ est convergente car l'inégalité des accroissements finis donne : $|u_n - \alpha| \leq (0{,}874)^n$. Ainsi cette suite est majorée par une suite qui a une convergence géométrique en $(0{,}874)^n$ dont la raison est inférieure à 1.



Après 20 itérations on obtient le tableau de valeurs suivant :donnent le tableau suivant des V. des V.A. par défaut de α . Je rappel l'organigramme de ce procédé déjà cité au chapitre V.

0	0
1	1,81712062517603
2	2,56636787386852
3	2,77625365303939
4	2,82968102825495
5	2,84296359270166
6	2,84624657068092
7	2,84705683991516
8	2,84725675088617
9	2,84730606893573
10	2,84731823543904
11	2,8473212368354
12	2,84732197725917
13	2,84732215991654
14	2,84732220497684
15	2,8473222160929
16	2,84732221883515
17	2,84732221951165
18	2,84732221967853
19	2,8473222197197
20	2,84732221972986



La dichotomie avait donnée après 20 itérations : 2,84732151031494< α < 2,84732246398926 qui sont des V.A par défaut et par excès de α à 10^{-6} près. **Nous constatons ici qu'après 12 itérations,** u_{12} = 2,847321977.. est une V.A de α à 10^{-6} près puisqu'elle appartient à l'intervalle $[a_{20}; b_{20}]$. On peut conjecturer que la convergence est plus rapide par la méthode du point fixe. Ceci signifie donc que la majoration $|u_n - \alpha| \leq (0{,}874)^n$ n'est pas la plus fine possible.