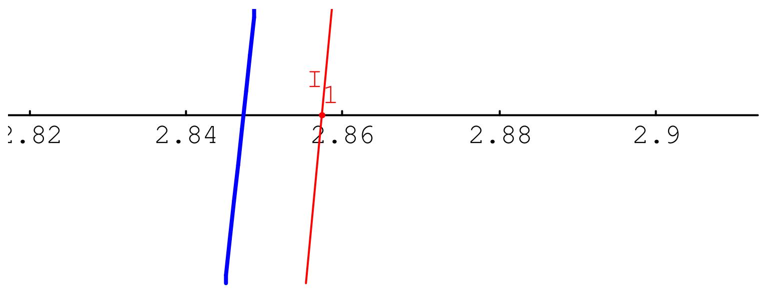
METHODE DES TANGENTES

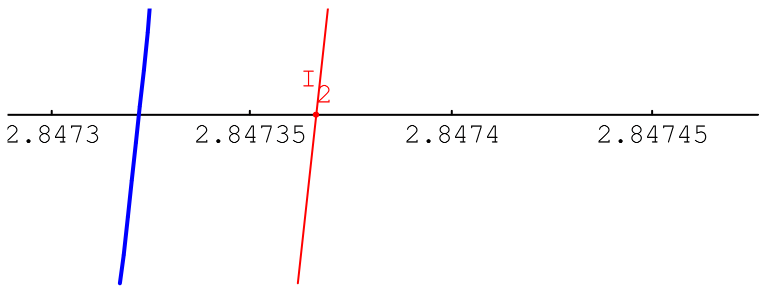
$x \in [2,3]$ $x^3 - 6x - 6 = 0$ (1) La suite récurrente définie par :

$u_0 = 3$ et $\forall n \in N$ $u_{n+1} = u_n - \dfrac{u_n^3 - 6u_n - 6}{3u_n^2 - 6} = g(u_n)$ est convergente puisque que la fonction f vérifie les conditions suffisantes annoncées au paragraphe I, 2° Partie de ce chapitre. En effet, f est de classe C^2 sur I = [2 ; 3] , f(2) <0 et f(3)>0 ; f ' >0 sur I et f " >0 sur I.

1° ETAPE. La tangente en M_0 à C_f coupe ci-dessous Ox en I_1 d'abscisse $u_1 = g(3) =$ 2,857142857.



2° ETAPE. La tangente en M_1 d'abscisse u_1 à C_f coupe ci-dessous Ox en I_2 d'abscisse $u_2 = g(u_1) =$ 2,847366761



Après une nouvelle itération, on obtient les valeurs consignées ci-dessous. La dichotomie permet d'affirmer que u_3= 2,847322103 est une valeur approchée par excès de α à 10^{-6} près puisque cette valeur approchée appartient à l'intervalle $[a_{20}; b_{20}]$. La vitesse de la convergence est évidente et dépasse de beaucoup ici celle de la méthode du point fixe. Remarquons que la méthode de Newton-Raphson, utilisée seule, ne nous permet pas de donner un majorant de l'erreur commise sur α. La recherche d'un tel majorant demande des connaissances que nous expliciterons en annexe 7 à la du chapitre.

0	3
1	2,857142857
2	2,847366761
3	2,847322103

EXEMPLE II Soit $f : x \to x^3 + 3x - 1$. Résoudre f(x) = 0 sur R

Puisque f est continue, strictement monotone sur [0;1] et $f(0).f(1) < 0$

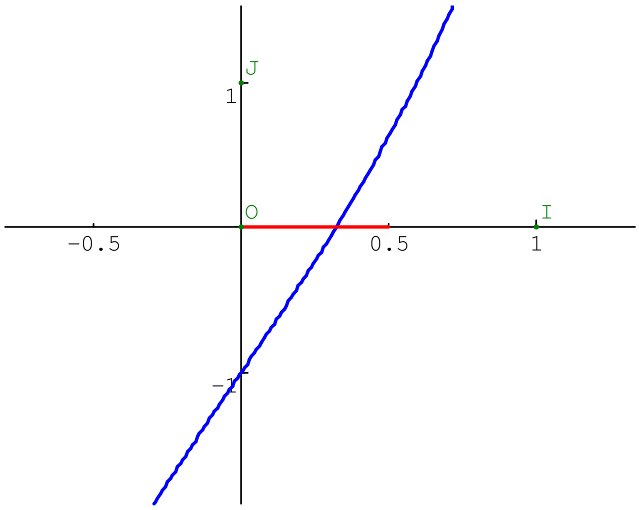
$f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [0;1]$. Ce réel α n'est pas rationnel sinon nous aurions : $\dfrac{p^3}{q^3} + 3\dfrac{p}{q} = 1$, p et q premiers entre eux. Donc $p^3 + 3pq^2 = q^3$, puisque p divise le premier membre, il divise le second, c'est à dire p divise q^3 donc divise q. Alors p =1 et 3q = 0, ce qui est impossible. Donc α est un nombre irrationnel ; pour le connaître (cf chapitre I), il est nécessaire de pouvoir en donner des valeurs approchées décimales à 10^{-n} près quelque que soit l'entier n.

DICHOTOMIE L'organigramme choisi pour établir un programme sur calculatrice ou sur ordinateur est le même que pour l'exemple I. L'initialisation du programme étant adaptée au cas de cette fonction.

Eclairage graphique

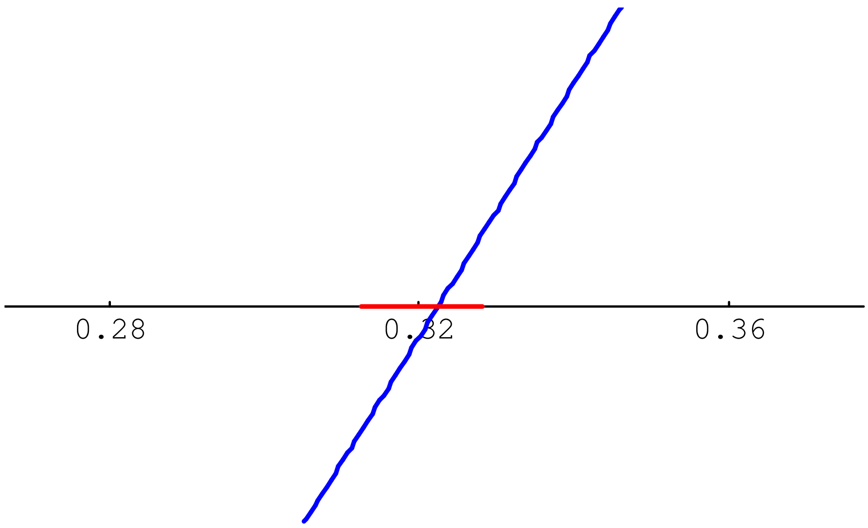
La première dichotomie donne le tracé suivant pour C au voisinage de α :

$a_1 = 0$; $b_1 = 0{,}5$



La sixième dichotomie donne le tracé ci-dessous au voisinage de α

:$a_6 = 0{,}3125$; $b_6 = 0{,}328125$



La réalisation de 20 dichotomies par une calculatrice ou un logiciel d'ordinateur, à partir de a = 0 et b = 1 donnent les valeurs approchées par excès et par défaut de α suivantes :

k	a_k	b_k
0	0	1
1	0	0,5
2	0,25	0,5
3	0,25	0,375
4	0,3125	0,375
5	0,3125	0,34375
6	0,3125	0,328125
7	0,3203125	0,328125
8	0,3203125	0,32421875
9	0,3203125	0,322265625
10	0,3212890625	0,322265625
11	0,32177734375	0,322265625
12	0,322021484375	0,322265625
13	0,3221435546875	0,322265625
14	0,3221435546875	0,32220458984375
15	0,322174072265625	0,32220458984375
16	0,322174072265625	0,322189331054688
17	0,322181701660156	0,322189331054688
18	0,322181701660156	0,322185516357422
19	0,322183609008789	0,322185516357422
20	0,322184562683105	0,322185516357422

Ainsi on a l'encadrement : **0,322184562683105 < α < 0,322185516357422** qui donne les valeurs approchées par défaut et par exès de α à 10^{-6} près. En effet $b_{20} - a_{20} = \dfrac{1}{2^{20}} \approx 9{,}5367 \times 10^{-7} < 10^{-6}$.Ceci se justifie aisément puisque chaque dichotomie divise la longueur de l'intervalle par deux. Ce nombre est un majorant de la longueur du 20° intervalle auquel appartient α. Plus généralement $|b_n - \alpha| \le \dfrac{1}{2^n}$ et $|a_n - \alpha| \le \dfrac{1}{2^n}$. La convergence vers α des deux suites adjacentes est géométrique en $\dfrac{1}{2^n}$.

LA METHODE DU POINT FIXE.

$x \in [0;\ 0{,}33]\ \ x^3 + 3x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow\ x \in [0;\ 0{,}33]\ \ \sqrt[3]{1-3x} = x = \varphi(x)$

L'itération ne fournit pas une suite convergente.

Nous avons montré au paragraphe 1 D de ce chapitre que $\psi(x) = x - \dfrac{1}{10} f(x)$ a pour point fixe α. $x \in [0;\ 0{,}33]\ \ x^3 + 3x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \psi(x) = \dfrac{-3}{10} x^3 + \dfrac{1}{10} x + \dfrac{3}{10} = x$

En utilisant le même programme que celui cité pour l'exemple I sur calculatrice (cf l'annexe 3 du chapitre V), on obtient le tableau des valeurs approchées des termes de la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \psi(u_n)$:

k	u_k	8	0,3221853546
0	0	9	0,3221853546
1	0,3	10	0,3221853546
2	0,3219		
3	0,3221834543		
4	0,3221853421		
5	0,32211853545		
6	0,3221853546		
7	0,3221853546		

A l'issue de 20 dichotomies on obtient : **0,322184562683105 < α < 0,322185516357422**
Cette méthode donne $u_4 \approx 0{,}3221853421$ qui vérifie l'encadrement ci-dessus. Justions le :
$\psi'(x) = -\frac{9}{10}x^2 + \frac{1}{10}$ donc ψ' décroissante et positive sur [0; 0,33], elle y est majorée par $k = \psi'(0) = \frac{1}{10}$ et l'inégalité des accroissements finis conduit pour la suite récurrente définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in N\ u_{n+1} = \psi(u_n)$ à $|u_n - \alpha| \le \frac{1}{3}(\frac{1}{10})^n$. La suite $(u_n - \alpha)$ dominée par une suite géométrique de raison 1/10 converge donc très rapidement vers 0. Ainsi la convergence de (u_n) vers α est géométrique en $(0{,}1)^n$.:$u_4 \approx 0{,}3221853421$**,** le terme de rang 4 a la précision atteinte au terme de rang 20 par dichotomie. Plus généralement, pour tout entier n, u_n est une V. A. de α avec la précision $\frac{1}{3}(\frac{1}{10})^n$. On peut donc constater sur cette exemple que les hypothèses des propriétés 2 et 3 du paragraphe II sont réalisées. La raison q de la suite géométrique, égale a $k = \sup_{x \in I} |f'(x)|$, implique la convergence et explique la rapidité relative de la seconde méthode.

METHODES DE NEWTON-RAPHSON

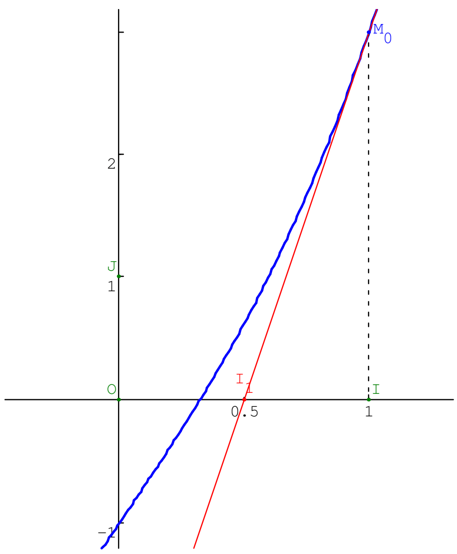
Supposons que f satisfait les conditions suffisantes du Théorème admis.[1] au paragraphe I (2° partie). Puisqu' une équation cartésienne de la tangente en un point M de C d'abscisse a s'écrit :

$y - f(a) = f'(a)(x - a) \Leftrightarrow x = a + \frac{y - f(a)}{f'(a)}$. Pour $y = 0$, on obtient les abscisses des points d'intersection avec Ox : $x_0 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$. Ceci définit une suite récurrente par :

$u_0 = 1$ et $\forall n \in N\ u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^3 + 3u_n - 1}{3u_n^2 + 3} = g(u_n)$. Nous admettons ici que la suite converge.

$f : x \to x^3 + 3x - 1$. Approche de α par la méthode des tangentes

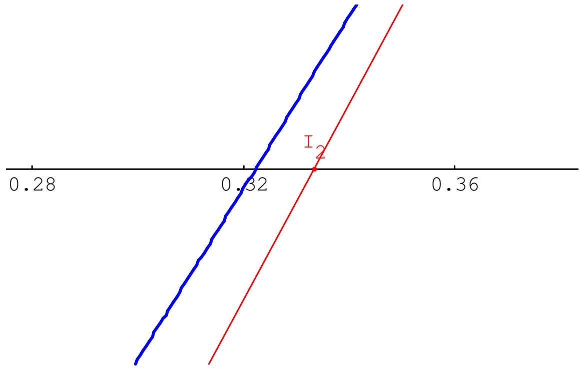
1° ETAPE. M_0I_1 est la tangente à C au point d'abscisse u_0= 1, elle coupe Ox en I_1 d'abscisse $u_1 = 0{,}5$



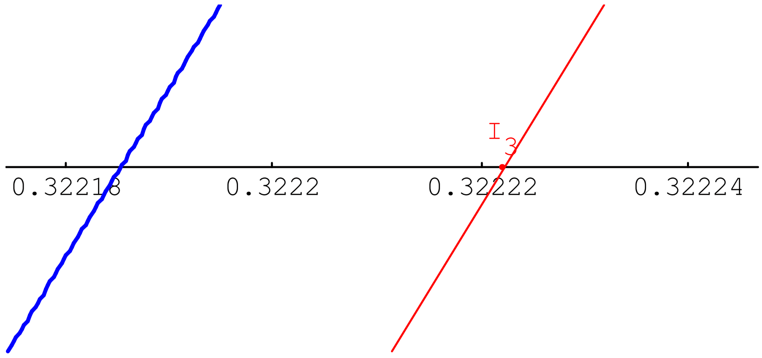
[1] **Note 1** : Ces conditions sont : 1) f est une fonction de classe C^2 sur un segment [u, v] vérifiant f(u) < 0 et f(v) > 0.
2) f ' > 0 sur [u, v] (f est alors strictement croissante) ; 3) enfin si f " > 0 sur [u,v], (f est convexe).

2° ETAPE

La tangente en M_1 d'abscisse $u_1 = 0{,}5$ coupe Ox en I_2 d'abscisse $u_2 = 0{,}33333$



3°ETAPE La tangente en M_2 d'abscisse $u_1 = 0{,}5$ coupe Ox en I_3 d'abscisse $u_3 = 0{,}322\ldots.2$



Résumons les résultats dans le tableau suivant : On peut conjecturer que la suite est décroissante et converge vers α et nous l'admettrons ici (cf annexe 7 du chapitre VI). les deux méthodes précédentes, dans lesquelles on maîtrise l'erreur commise sur α, permettent d'affirmer que $u_4 \approx 0{,}322185355$ est une V.A. de α à 10^{-6} près. Là aussi la vitesse de convergence est remarquable.

k	u_k
0	1
1	0,5
2	0,333
3	0,32222
4	0,322185355
5	0,3221853546
6	0,3221853546