

ETUDES DE REGULARITE L'ESPACE ET LOGICIEL GEOSPACW

INTRODUCTION

CONSTRUCTION DU DODECAEDRE REGULIER

CRISTAUX ISSUS DU SYSTEME CUBIQUE

Anne-Marie Marmier et Jean-pierre Daubelcour
Groupe de Travail EMTA
IREM de LILLE

ETUDES DE REGULARITE et LOGICIEL GEOSPACW

INTRODUCTION

Nous vivons dans un espace, que les Eléments d'Euclide nous ont appris à décrire par un discours rationnel permettant de comparer sans en faire une expérience réelle des objets solides définis à l'aide de surfaces planes, de droites et de points. A partir du XVIIe siècle le discours s'est enrichi, les méthodes analytiques et vectorielles s'y sont introduites puis les groupes de transformations.

L'enseignement secondaire met en avant une présentation de la géométrie à partir des transformations, et il distille une "géométrie spatiale" dès la sixième à travers l'étude des corps solides simples ; au lycée, l'objectif change, l'espace s'organise et les objets vont s'y coordonner entre eux.

Nous avons choisi d'offrir un petit périple sous le thème de la régularité, conjuguant étude-découverte des objets de l'espace et transformations, cela à travers deux exemples de construction : le dodécaèdre régulier et les formes cristallines du système cubique.

Dans le premier cas le polyèdre régulier est défini comme un solide ayant toutes ses faces égales et tous ses angles polyèdres égaux, la construction effective montre l'existence et l'unicité (en un sens à préciser) d'un tel solide, dans la construction duquel apparaissent des rotations qu'on manipule empiriquement.

Dans le deuxième cas, la régularité est définie via des groupes d'isométries du cube et la construction fait découvrir les formes.

Nous nous plaçons dans le cadre d'un exposé suivant la tradition euclidienne, où l'égalité signifie avoir même forme et même grandeur, l'égalité des figures rectilignes découlant de l'égalité des segments et des angles qui la composent. Le principe d'égalité par superposition qui fonde le discours s'adapte sans difficulté aux constructions de trièdres avec lesquels nous aurons à travailler.

Construire est un acte qui amène à la réalisation d'un objet ; il est contingent aux instruments utilisés, l'ensemble du processus peut rester dans le discours de ce qu'il est possible de faire, une expérience de pensée en quelque sorte, ou bien aboutir à la réalisation matérielle d'un objet, donné à voir, à toucher...

Le point de vue est architectural : on construit un solide en assemblant des pièces selon un ordre nécessaire avec un certain nombre de connaissances a priori. Nous faisons l'hypothèse qu'une telle pratique expérimentale et personnelle contribue à forger l'espace comme une entité, car il s'agit pour avancer d'arriver à se penser par rapport à l'objet et de penser comment il est intimement fait, quelle est la coordination de ses éléments entre eux.

Nous avons choisi comme instrument le logiciel *geospacw* ; il permet de réaliser de belles représentations de figures solides que la construction manuelle à ce niveau ne permet pas.

Nous n'avons donné qu'un minimum de commentaires pour éclairer la démarche et les dessins obtenus ; c'est au lecteur d'accomplir pour lui le va-et-vient entre le raisonnement et l'action à commander à l'outil, d'en escompter les effets et de les constater.

Ce logiciel construit par une équipe d'enseignants du CREEM dans le cadre plus général du CNAM a un grand intérêt pédagogique et conjugue simplicité et performance. Il est conçu pour l'apprentissage de la géométrie, la figure est construite par étapes et réaliser ces étapes demande de mobiliser des connaissances géométriques.

Au-delà de la constatation sur l'écran de l'ordinateur, on trouvera le détail de certains points théoriques dans la bibliographie. Les faiblesses du logiciel, obligent à penser une méthode de construction en rapport avec son économie et influent sur les méthodes géométriques, nous expliciterons cela au fil du texte.

En conclusion nous voudrions montrer comment le thème de la régularité des solides et l'informatique introduisent à un espace structuré et initient aux transformations spatiales, conduisent à des méthodes analytiques simples et sont moteurs de découverte.

CONSTRUCTION DU DODECAEDRE REGULIER

Les Eléments d'Euclide tels qu'ils nous sont parvenus s'achèvent au livre XIII dont l'objectif est l'exhibition des cinq solides platoniciens. Ces constructions amènent à l'existence les objets définis dès l'entrée du livre XI ; cube, tétraèdre, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre sont définis comme figures solides comprises sous des figures égales, équilatérales et équiangles : carrés, triangles et pentagones. En conclusion du livre, il est noté qu'excepté ces cinq figures " *on ne peut pas construire une autre figure qui soit contenue sous des figures équilatérales et équiangles* ". Il est implicite que les figures considérées sont supposées convexes.

Nous nous sommes intéressés à la construction du dodécaèdre régulier, parce que comme l'icosaèdre qui peut lui être associé par dualité sa construction demande plus d'engagement que les autres. Certes, c'est une figure mythique, en témoigne le dialogue de Platon du *Timée* ou *La Divine Proportion* de Luca Paccioli ; elle en appelle au partage en extrême et moyenne raison et aux multiples relations entre grandeurs qu'il génère, donc aux irrationnelles. La construction euclidienne exploite ces proportions pour accrocher des pentagones réguliers et égaux sur chacune des douze arêtes d'un cube de manière qu'ils s'ajustent entre eux ; nous ne reviendrons pas sur cette construction.

Nous avons retravaillé les constructions données par A.M Legendre dans ses *Eléments de géométrie* et J.Hadamard dans ses *Leçons de géométrie élémentaire* parce qu'elles offrent matière à réfléchir et à exécuter dans un cadre qui est celui d'un enseignement secondaire soucieux de construire sans formalisme l'espace euclidien.

En effet s'il est facile de montrer qu'il y a au plus cinq types de polyèdres réguliers, leur construction raisonnée prouvera leur existence et leur unicité, elle fournira une connaissance simple et profonde sinon complètement consciente sur l'espace habituel.

Le trièdre apparaît vite comme élément de base de la construction et il est nécessaire de s'adjoindre quelques outils simples, presque matériels, permettant de comparer deux trièdres. Pour Legendre et Hadamard le plan de construction consiste à construire un sommet et les trois pentagones réguliers et égaux accolés à ce sommet puis à compléter le solide par itération ; mais la mise en œuvre est différente. Chez Legendre, on reproduit de place en place une situation spatiale, chez Hadamard, on effectue des rotations et le lecteur peut apprécier la clarification que cela introduit en le soulageant d'avoir à penser de plus près l'organisation de l'objet. Nous avons réalisé cette dernière construction avec le logiciel *geospacw*.

L'usage que l'on fait des rotations spatiales est porté par l'image d'une porte qui tourne autour de ses gonds, la rotation est visuellement associée à un mouvement qui déplace les solides en laissant leur organisation interne inchangée. Commander à la machine demande de traduire cette vision de l'ordre du quotidien ; le logiciel agit comme boîte noire, il ne va

pas économiser un cours sur les rotations qui d'ailleurs serait inutile, mais il permet d'en faire l'expérience et de les introduire non comme un but d'enseignement sans enjeu perceptible mais comme un instrument pour aller plus loin.

On aura à manipuler : rotation d'axe construit et d'angle donné pour construire une première face pentagonale régulière, et rotation d'axe construit envoyant un point construit sur un point construit (ce qui nécessite une disposition spécifique à reconnaître) qui entraîne une partie construite de la figure sur une nouvelle figure dont il faut être sûr qu'elle fait bien partie du tout. Dans tous les cas l'image première du mouvement disparaît derrière celle d'un état initial et d'un état final, comme effet d'une commande. La rotation étant perçue comme transport d'une figure rigide, les invariants " distance" et " angle" vont de soi.

I - Les préalables à la construction

Considérons sans formalisation qu'un dodécaèdre régulier serait un polyèdre dont les faces sont des pentagones réguliers égaux, les faces adjacentes étant également inclinées l'une par rapport à l'autre. Il s'ensuit qu'en chaque sommet confluent trois faces dont les angles sont égaux à $3\pi/5$.

1 - Remarque : réaliser un trièdre dont les trois angles des faces sont égaux à $3\pi/5$ est aisé. En suivant Euclide, livre XI prop.23, il suffit de prendre un triangle isocèle d'angle au sommet $3\pi/5$, soit d sa base et c l'autre côté, de réaliser un triangle équilatéral de côté d et d'élever sur l'axe de ce triangle la hauteur h , telle que $h^2 = c^2 - d^2/3$; ce n'est pas ainsi que nous opérerons avec *geospacw*, mais nous utiliserons autrement cette configuration. Que la réalisation de ce trièdre aboutisse à un objet unique en un sens à préciser est conséquence du raisonnement qui le construit et est précisé par les considérations ci-dessous.

2 - Comparaison des trièdres

Un trièdre est un objet géométrique auquel sont associés divers éléments : trois demi-droites de même origine, limitant trois secteurs angulaires plans, les faces, et donc aussi trois angles dièdres (ou inclinaisons de chacune des faces sur une face adjacente). Des trièdres seront dits égaux, entendez superposables quand ils auront même disposition, mêmes angles de faces et mêmes angles dièdres. Sans revenir sur les analogies triangles/trièdres (Euclide et Legendre) puis trièdres/triangles sphériques (Hadamard), deux résultats sont énoncés (Hadamard, livre V, chap.VI):

- (1) - « Deux trièdres sont égaux ou symétriques, lorsqu'ils ont une face égale adjacente à deux dièdres égaux chacun à chacun. »
- (2) - « Deux trièdres sont égaux ou symétriques quand ils ont un dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune. »
- (3) - « Deux trièdres sont égaux ou symétriques quand ils ont les trois faces égales chacune à chacune. »

Dans le cas qui nous préoccupe, les faces étant toutes égales, il ne se pose aucune question de disposition. Ces considérations résultent élémentairement de l'application des cas d'égalité des triangles (à condition de bien vouloir les considérer dans l'espace !) et du théorème de Pythagore.

Que cette position d'artisan ne déconsidère pas l'ensemble ! On peut également se convaincre de ces résultats par le calcul vectoriel et analytique. La construction de base est portée par le théorème dit « des trois perpendiculaires » : dans un trièdre de sommet O, d'arêtes OA, OB, OC, le point A et sa projection orthogonale A' sur le plan (O,B,C), se projettent en un même point H sur la droite OB. L'angle dièdre d'arête OB est l'angle $\angle AHA'$ ou son supplémentaire suivant que A' est intérieur ou extérieur à l'angle $\angle BOC$.

En conclusion, comme pour le triangle, dans un trièdre, la donnée de trois éléments convenablement choisis détermine les trois autres.

Dans le cas particulier dont nous traitons, celui du dodécaèdre régulier, tous les angles des faces sont égaux à $3\pi/5$ et tous les angles dièdres sont égaux à un même α que le calcul précédemment suggéré permet de préciser : $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. (Notez que les formules de trigonométrie sphérique allègent la méthode).

3 -

Deux dodécaèdres dont une face de l'un est égale à une face de l'autre sont égaux (mettre les deux faces en superposition de manière que les deux faces coïncident ainsi que deux angles dièdres associés, les faces contiguës à la première coïncideront et ainsi de proche en proche). Il suffit donc d'exhiber une construction d'un seul dodécaèdre.

II - La construction de Legendre

Soient trois pentagones réguliers et égaux accolés en un sommet A suivant leurs arêtes AB, AE, AF. Notons ABCDE l'un des pentagones et T le trièdre de sommet A ; les trois angles de faces sont égaux à $3\pi/5$, donc les trois angles dièdres sont égaux à α .

On construit très matériellement le dodécaèdre en ajustant des pièces : le discours rationnel qui utilise les règles d'égalité, 1, 2, 3 rappelées ci-dessus, montre précisément que les pièces s'ajustent bien.

Initions le processus pour donner une idée de son fonctionnement. (2) implique que le trièdre de sommet B est égal à T. On peut donc ajuster le pentagone BHIJC. (3) implique que l'angle dièdre d'arête BC vaut α , et (2) implique alors que le trièdre de sommet C est égal à T, donc qu'on peut ajuster un pentagone CJKLD, etc. jusqu'au pentagone EDLMN₁. En bout de course, on a deux trièdres de sommet E, avec une face commune (AED) adjacente à deux dièdres égaux à α , donc d'après (1) N₁ est confondu avec N et on a obtenu un polyèdre P ouvert à 6 faces pentagonales égales.

On construit un polyèdre P' de la même façon : le second temps de l'opération consiste à montrer qu'on peut l'ajuster au précédent. Le discours servira encore, non pas à paraphraser seulement le geste opéré sur l'objet matériel réalisé ou sur le dessin plan comme ici, mais à expliquer pourquoi les coïncidences ont lieu, en jouant des propriétés (1),(2),(3) comme de règles.

Notons les sommets de P' avec les mêmes lettres que les sommets de P mais assorties d'un « ' ». L'angle $\angle H'G'F'$ est égal à $3\pi/5$ donc il s'ajuste sur l'angle $\angle GFO$. Le trièdre de sommet F = G', (O=F',A,G) est d'après (3) égal à T et l'angle dièdre d'arête FO vaut α . Les deux trièdres de sommet O, O(F,A',O') et O(F,A',N) sont alors égaux d'après (1), d'où N = O', etc.

Démonstration ? Sans doute pas d'un point de vue strictement formaliste ; le raisonnement ne peut se développer qu'à partir d'un support, et le fait d'ajuster « deux bols » bien réels fait éviter de vérifier qu'à chaque ajout d'une face, l'objet tout entier reste d'un même côté du plan de cette face (on pourrait évidemment faire encore des phrases pour justifier cela) ; mais peut-on mieux comprendre comment l'objet est fait sinon en l'édifiant ainsi pièce par pièce ?

FIG 0 : Le trièdre de sommet A

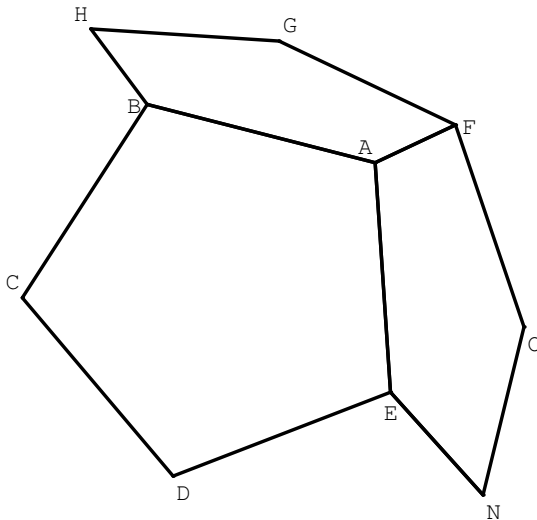
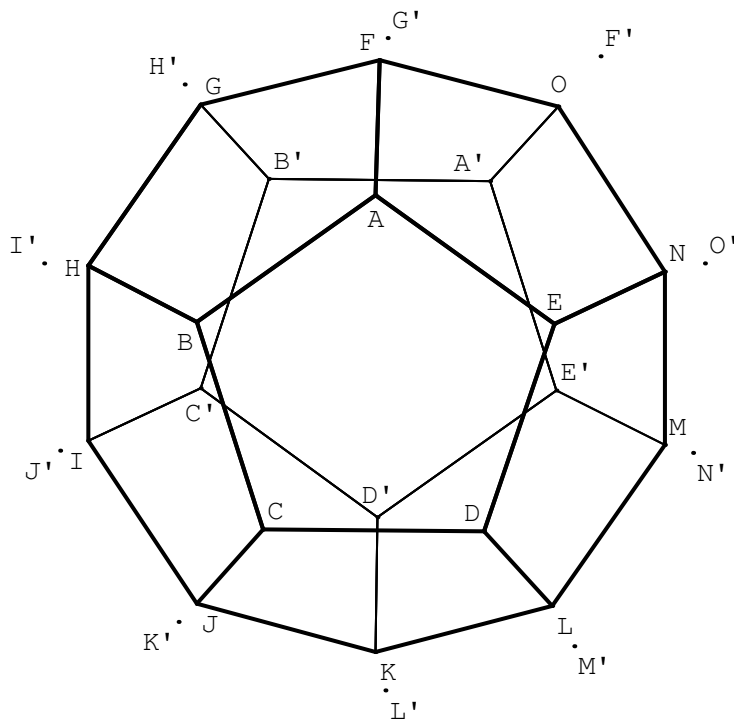


FIG 1 : On distingue le polyèdre P ouvert (ABCDEFGHIJKLMNO), en avant de la figure, trait épais à 6 faces pentagonales égales et son ajustement avec le polyèdre ouvert P' (A'B'C'D'E'F'G'H'I'J'K'L'M'N'O') en arrière, en trait fin.



III - La construction d'Hadamard

Hadamard donne deux démonstrations d'existence du dodécaèdre régulier, la première, pas complètement satisfaisante, en le construisant à l'aide de rotations (dans le chapitre V de ses « Leçons de géométrie » consacré à la formule d'Euler et aux polyèdres réguliers), l'autre à caractère algébrique (en Note à la fin du livre) où le polyèdre est associé à un pavage de la sphère en polygones sphériques réguliers et égaux, lui-même lié au sous-groupe fini des rotations de la sphère contenant des rotations d'ordre 5.

Nous suivons ici le déroulement de la première construction.

On part encore de trois pentagones réguliers et égaux accolés suivant les arêtes AB, AE, AF ; on note les faces pentagonales F1, F2, F3 selon la figure ci-dessous. L'outil rotation est utilisé pour satisfaire à la nécessité de reproduire en chaque sommet un trièdre tel que le trièdre originel de sommet A. Ainsi, et sans que cela soit explicité dans le texte d'Hadamard, pour construire le trièdre de sommet B contenant BA, la seule possibilité est d'utiliser la rotation R qui envoie E en A et A en B (rotation dont l'axe est l'axe du pentagone F1).

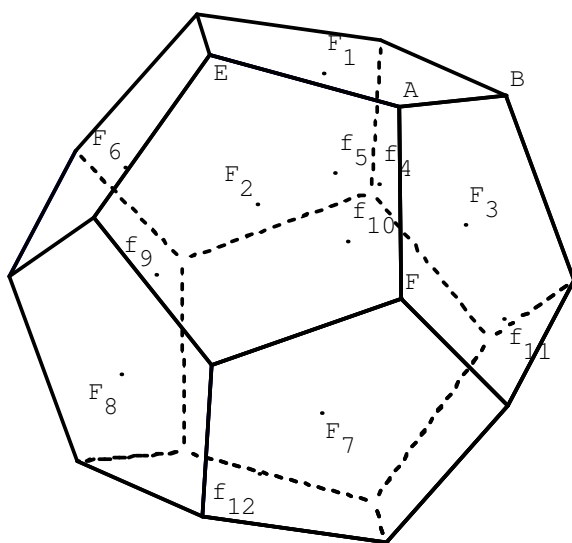


FIG2 : les faces "cachées" sont dessinées en pointillé. Pour une meilleure lisibilité de la figure, les 6 faces "avant" sont notées F1, F2, F3, F6, F7, F8 et les faces cachées sont notées f4, f5, f9, f10, f11 et f12.

R envoie le demi-plan limité par la droite AE et contenant le pentagone F2 sur le demi-plan limité par la droite AB et contenant le pentagone F3, puisque ces faces sont également inclinées sur la face F1. R envoie donc le pentagone F2 sur F3 (un pentagone régulier étant complètement déterminé par l'un de ses côtés et sa disposition par rapport à la droite contenant ce côté).

Il en résulte immédiatement qu'en itérant cette rotation, on obtiendra trois nouveaux pentagones numérotés f4, f5, F6 adjacents à F1, chacun étant adjacent au précédent et le pentagone F6 à F2.

De même la rotation autour de l'axe du pentagone F2, qui envoie E en A et A sur F, envoie F1 sur F3, et permet de construire les pentagones F7 (image de F3) et F8 (image de F7), F6 étant l'image de F8.

L'inverse de R, envoie F7, adjacent à F3 et F2, sur F8, adjacent à F2 et F6 (un pentagone régulier étant complètement déterminé par la donnée de trois sommets successifs) ; en itérant

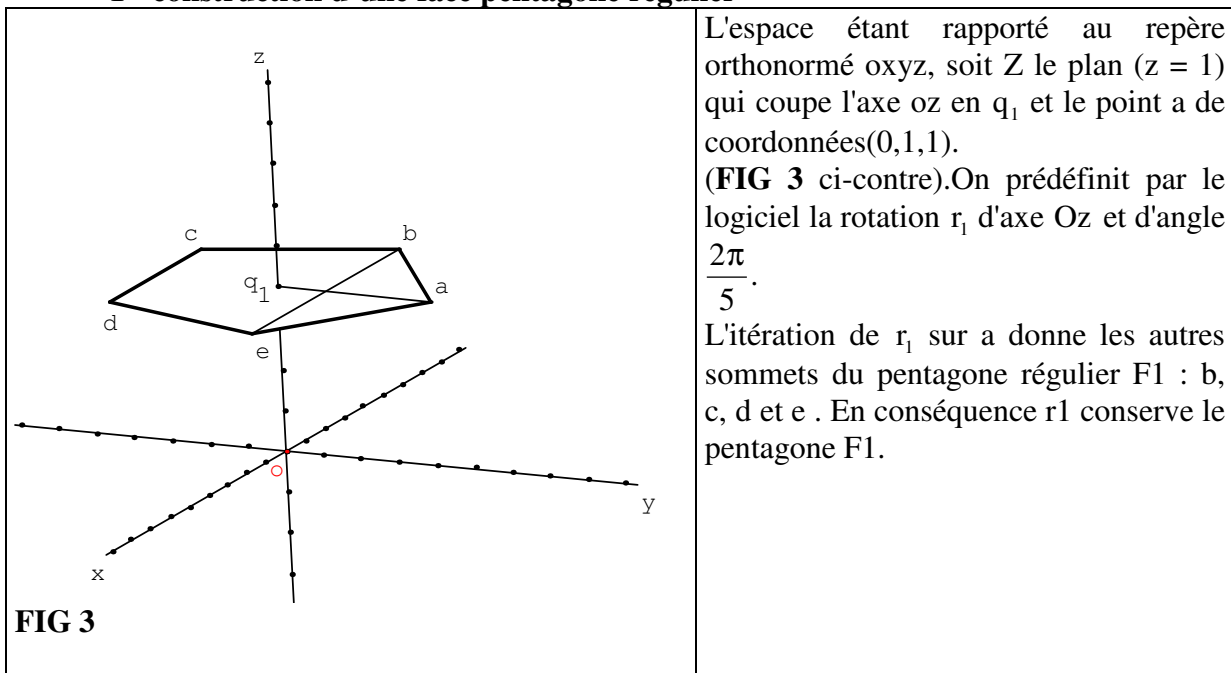
cette rotation on obtient trois nouveaux pentagones : f9 (adjacent à F6 et f5), f10 (adjacent à f5 et f4), f11(adjacent à f4 et F3).

Les sommets libres de F7 et F8 dérivent les uns des autres par cette rotation donc sont les sommets d'un pentagone régulier qui est la face f12 du polyèdre et de même axe que F1.

Que l'on obtienne bien un polyèdre convexe et borné, si ce raisonnement rapidement tracé n'est pas complètement probant, la construction pas à pas des paragraphes suivants vise à nous en convaincre.

IV - La construction avec géospacw

1 - construction d'une face pentagone régulier



2 - Construction d'un trièdre régulier $t = a(bef)$, dont les faces sont égales à $3\pi/5$.

La construction d'un trièdre régulier d'arêtes ab et ae données a évidemment deux solutions symétriques par rapport au plan (abc) . On en choisira une, où il est direct par exemple, ce qui fixera les constructions suivantes.

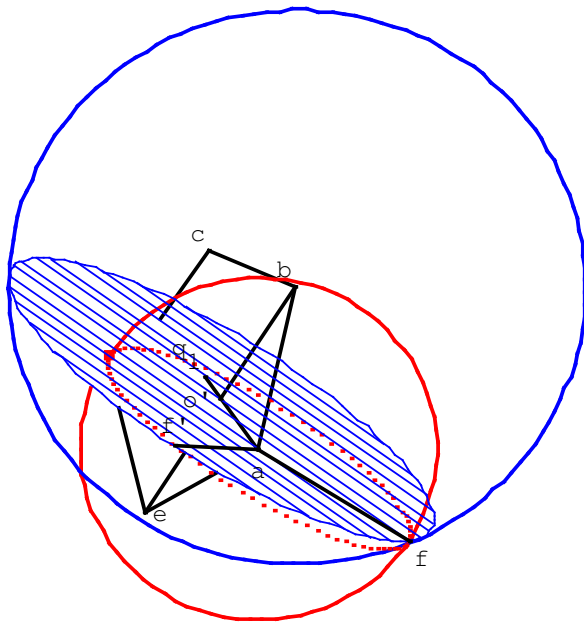


FIG 4

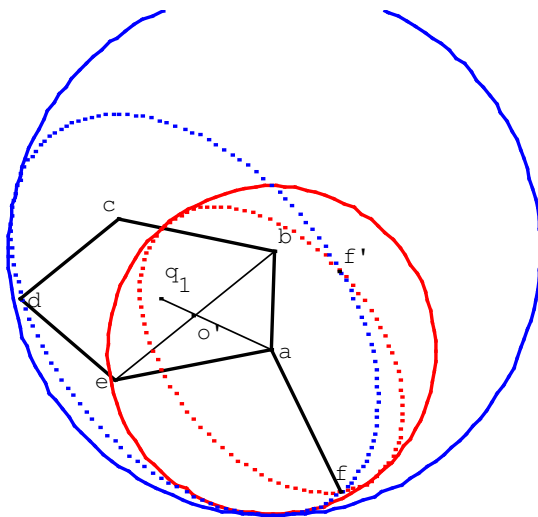


FIG4 bis

ANALYSE. Supposons construit l'angle trièdre régulier $a(bef)$ de sommet a , dont les faces sont égales à $3\pi/5$. La face $F1$ est alors un pentagone régulier, donc les cinq arêtes sont égales: $ab = ae = af$, et $eb = ef = fb$. Soit s_1 la sphère de centre a et de rayon ab , s_2 la sphère de centre b et de rayon be ; enfin le plan p médiateur du segment $[b,e]$. Le plan p passe par a , q_1 et f . Donc f appartient nécessairement aux surfaces s_1 , s_2 et p . (FIG 4)

SYNTHESE

Construisons s_1 , s_2 et p . (FIG 4bis).

La sphère s_1 et le plan p sont sécants selon un grand cercle c_1 de centre a puisque le plan p passe par le centre a .

La sphère s_2 et le plan p sont sécants également selon le cercle c_2 puisque la distance du centre b au plan p égale la moitié du rayon: $be/2$. Le point o' (FIG 4 bis) milieu de $[e,b]$ est la projection orthogonale du centre b de la sphère s_2 sur le plan p , o' est donc le centre du cercle c_2 .

FIG 4 ter

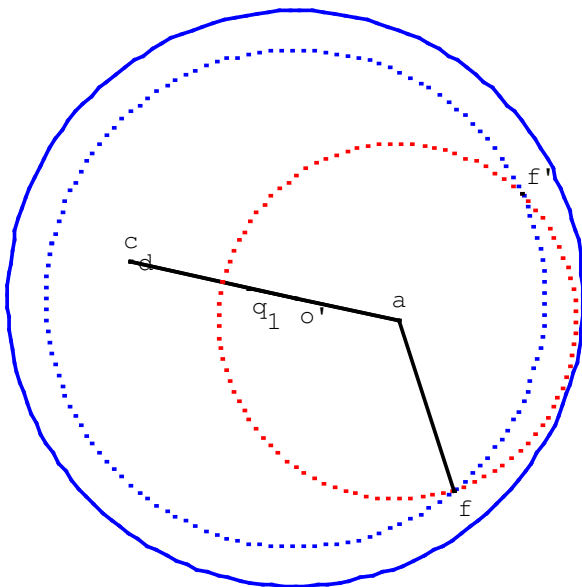
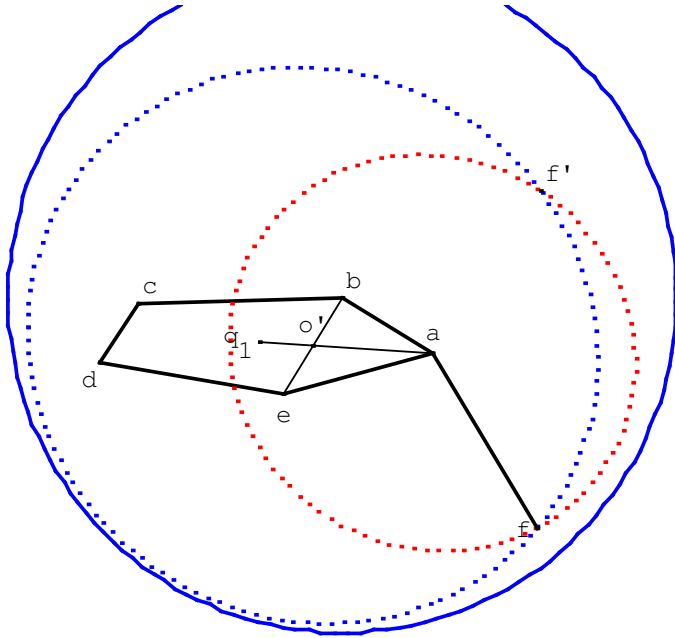


FIG 5
Projection orthogonale
de la FIGURE 4 sur le plan médiateur p.

Les cercles $c_1(a, ab)$ et $c_2(o', \sqrt{(be)^2 - \frac{1}{4}(be)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}be)$ situés dans le même plan p sont donc sécants puisque que la distance des centres ao' répond aux conditions. En effet dans le triangle rectangle $eo'a$ on a : $ao' < ae$ (l'hypoténuse) donc a fortiori $ao' <$ rayon de $c_1 +$ le rayon de c_2 ;

de même $ao' > ae - o'e$, soit $ao' > ae - \frac{be}{2}$ et

a fortiori $ao' > \left| ae - \frac{\sqrt{3}}{2}be \right|$; ainsi

$ao' > |\text{rayon de } c_2 - \text{rayon de } c_1|$. Donc les points d'intersection f et f' de c_1 et c_2 dans le plan p existent.

Considérons (FIG 4 bis) le trièdre $a(efb)$ de sens direct : $fb = fe = eb$ est le rayon de la sphère s_2 ; les triangles isocèles eab, baf et eaf sont égaux puisqu'ils ont leurs trois côtés respectivement égaux. Il en résulte que $\text{baf} = \text{eaf} = 3\pi/5$ et ainsi le trièdre $a(bef)$ répond à la question.

(voir FIG 6)

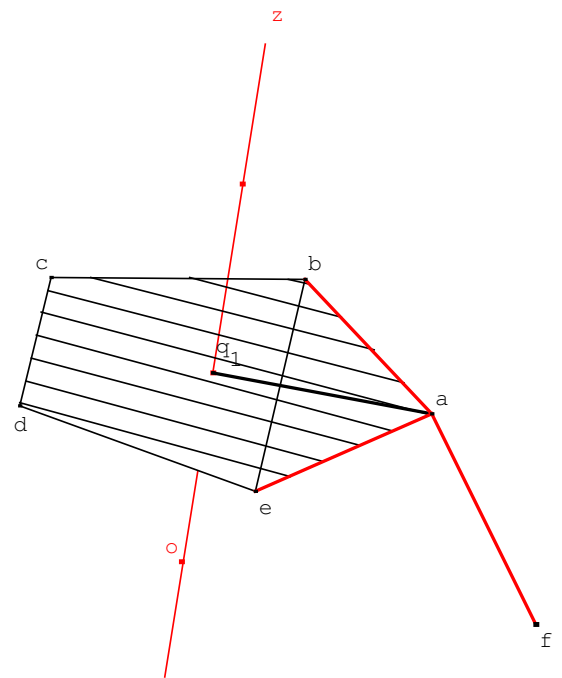


FIG6

3- Construction des trois pentagones accolés au sommet a du dodécaèdre

Dans ce paragraphe, nous noterons F_i (i entre 1 et 12) les faces du dodécaèdre et q_i leurs centres respectifs.

FIG 7

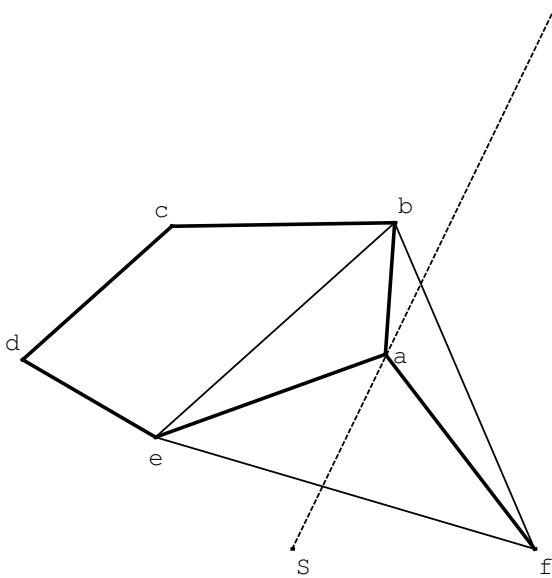


FIG 8

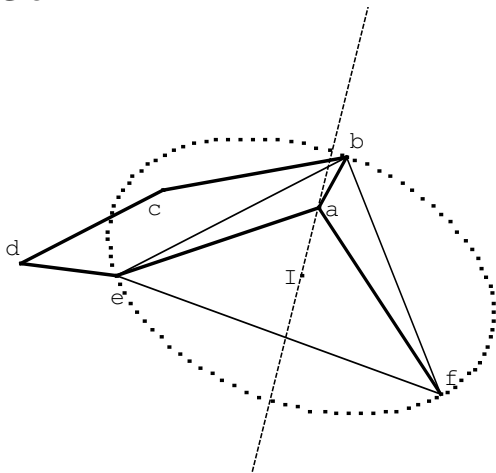
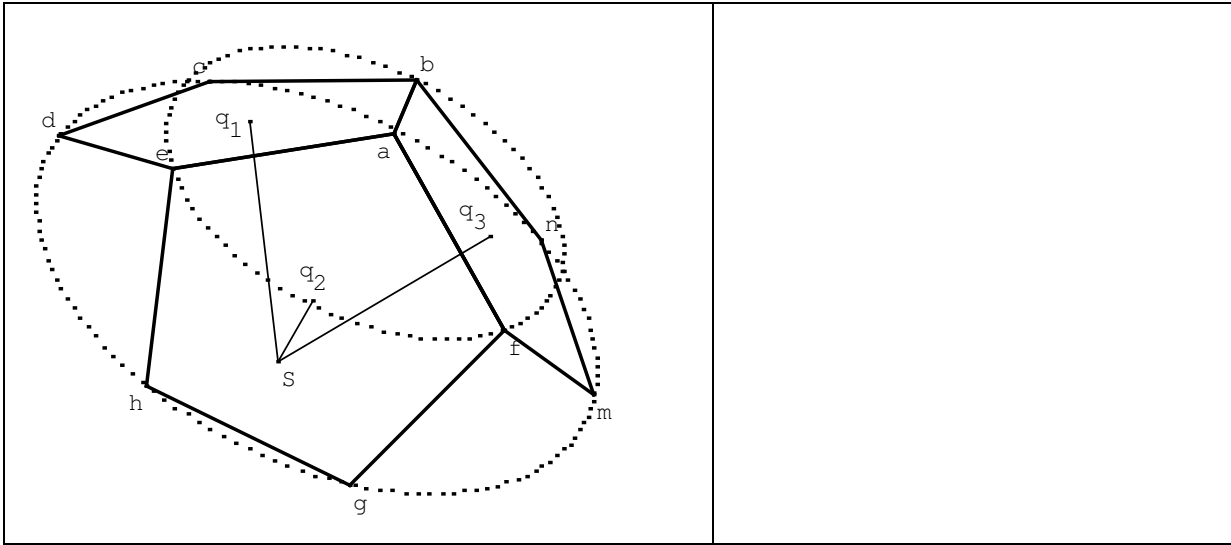


FIG9

Pour l'instant, S désigne un point de l'axe du triangle équilatéral efb situé dans le demi-espace limité par le plan (eab) et contenant le point f. La rotation r d'axe (Sa) et d'un tiers de tour qui tranforme b en e, transforme e en f et f en b (**FIG 7 et 8**) Remarque : le logiciel *geospacw* permet en effet de construire une droite orthogonale à un plan.

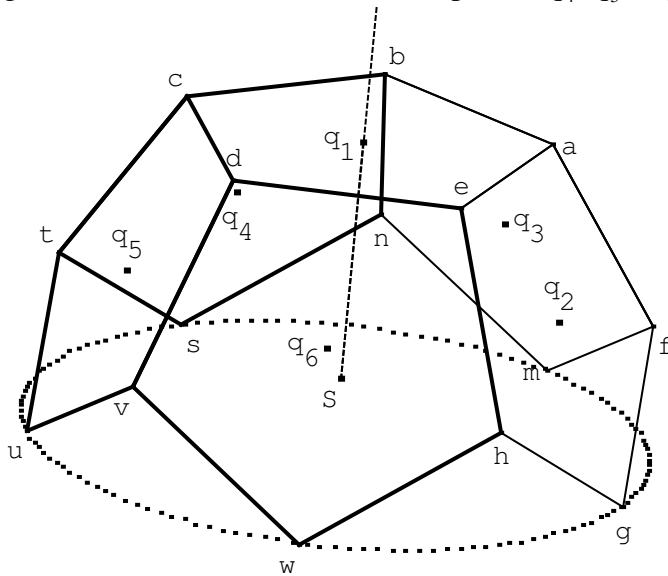
De plus , il permet de construire l'image d'un polygone par certaines transformations de l'espace dont la rotation. L'image par r du pentagone F_1 (abcde) est un pentagone régulier construit nécessairement sur ae et af (**FIG 9**). Posons $r(c) = h$, $r(d) = g$: c'est le pentagone régulier F_2 (ehgfa) : Cette même rotation transforme F_2 en un pentagone régulier F_3 construit sur af et ab posons $r(h) = m$ et $r(g) = n$: F_3 est le pentagone (afmnb). (**FIG 9**). L'image par r du pentagone F_3 est le pentagone F_1 et ces trois pentagones sont également inclinés entre eux (propriété de la rotation).

Les axes des trois pentagones réguliers sont concourants en un point de l'axe du triangle équilatéral efb ; désormais nous appelons ce point « S » (**FIG 9**).



4- Action de r_1 et de ses itérés sur les pentagones F_2 et F_3

FIG 10 : en trait plein les trois nouveaux pentagones réguliers F_4 , F_5 et F_6 de centres respectifs q_4 , q_5 et q_6



Reprenons la rotation r_1 (§1) d'axe $Oz = Sq_1$ et d'angle $2\pi/5$. La remarque ci-dessus entraîne que le pentagone F_3 est l'image de F_2 par r_1 . L'image de F_3 est un pentagone régulier F_4 construit sur b, c, n etc.... Alors F_6 est le pentagone régulier construit sur e, d, v , (**FIG 10**). Comme son plan est celui de (deh) à cause de l'inclinaison, il s'ajuste sur le pentagone 2. On obtient un polyèdre ouvert Σ' à six faces pentagonales égales et dont tous les angles dièdres sont égaux. Notons que $r_1(h) = f$, $r_1(g) = m$, $r_1(f) = n$, $r_1(m) = s$, $r_1(n) = t$, $r_1(s) = u$, $r_1(t) = v$ et $r_1(u) = w$. Ceci définit les 15 sommets du polyèdre ouvert Σ' . La projection orthogonale sur le plan de la face F_1 (**FIG 11**) illustre l'action de la rotation r_1 sur les 6 polygones réguliers. S , équidistant des 15 sommets cités, est le centre de la sphère circonscrite au polyèdre Σ' .

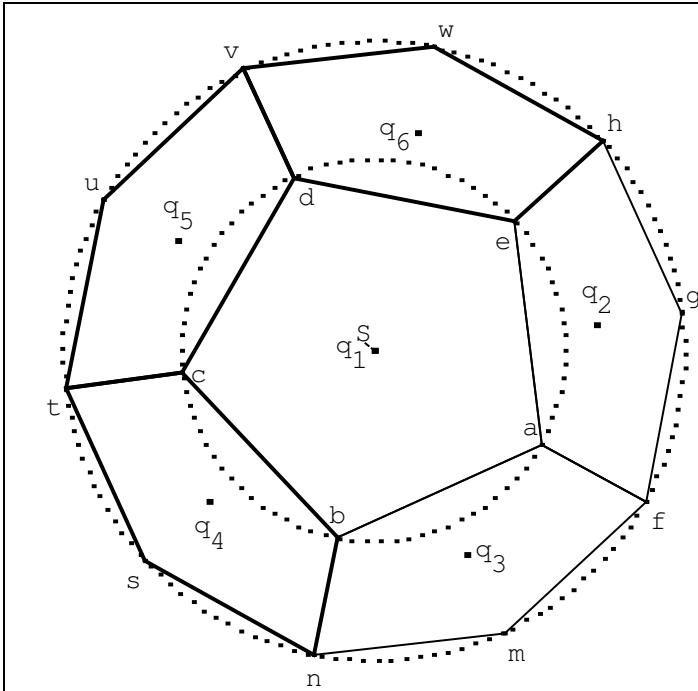
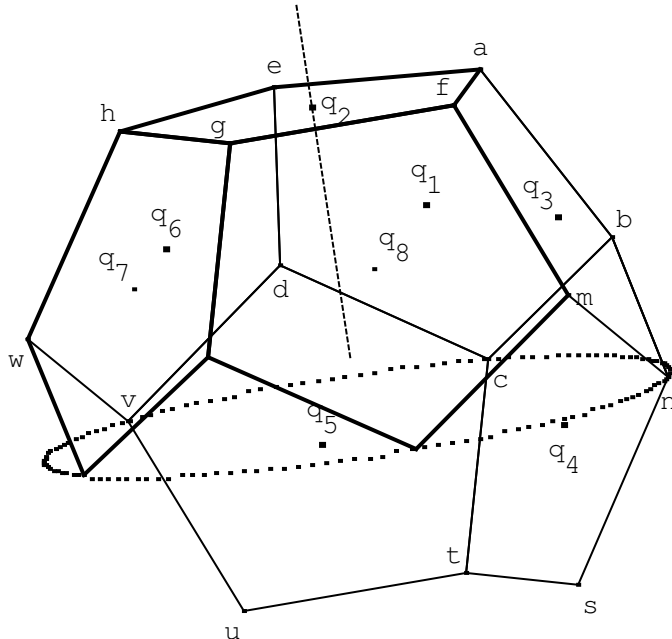


FIG 11
Projection orthogonale de Σ' sur le plan de la face 1

5 – Action de r_2 , rotation d'axe celui de F_2 transformant a en e.

Soit r_2 la rotation d'axe la demi-droite Sq_2 et d'angle $2\pi/5$. Elle conserve le pentagone F_2

FIG 12 : Action de r_2 sur F_4

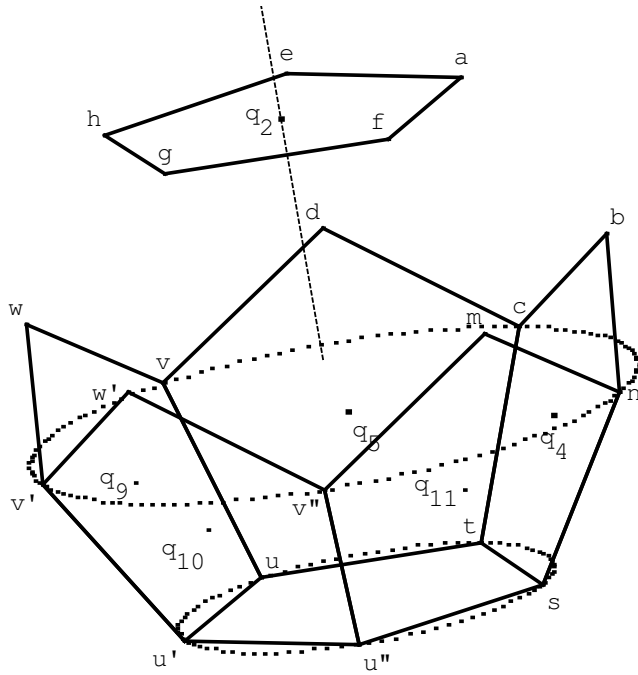


Rappelons que q_i désigne le centre du pentagone régulier F_i . Cette rotation r_2 transforme F_3 en F_1 , F_1 en F_6 , F_6 en F_7 et F_7 en F_8 .

Sur la **FIG 12** sont en trait plein les polygones F_2 , F_7 et F_8 .

r_2 envoie n sur c , b sur d et c sur v (**FIG 12**). Par conséquent F_4 est envoyé sur le pentagone passant par c , d et v et également incliné sur F_1 que F_4 sur F_3 : c'est donc le pentagone F_5 . De plus r_2 envoie s sur t et t sur u , et F_5 est le pentagone $(cdvut)$.

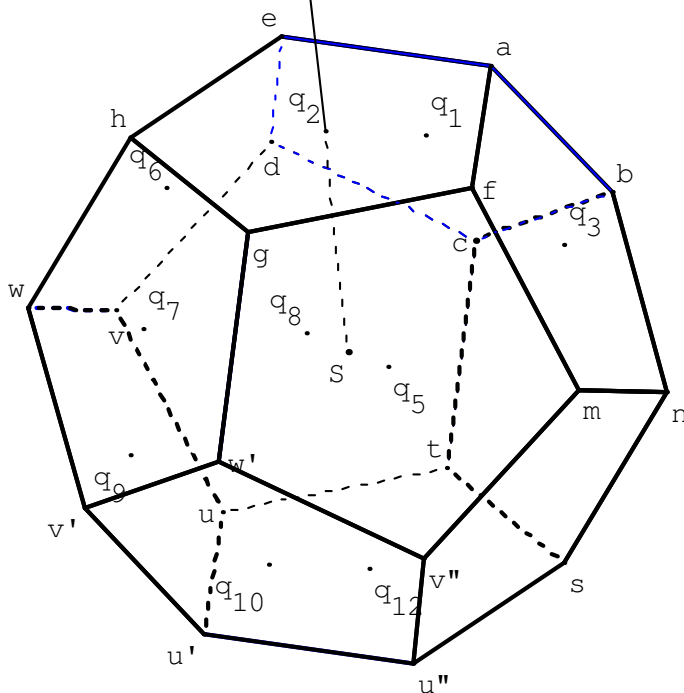
FIG 13 : Actions itérées de r_2 sur P_4



Les transformés successifs de F5 par r_2 sont le pentagone F9 de centre q_9 , puis F10 et F11 qui s'ajusteront avec le pentagone F4 pour les mêmes raisons que ci-dessus (FIG 13) . Enfin les sommets libres des pentagones F4, F5, F9, F10, et F11 se correspondant par r_2 sont les sommets de la face pentagonale régulière F12. (FIG 13)

Les notations choisies définissent ainsi les nouvelles faces pentagonales : F9(uvwv'u') F10(u'u''v''w'v') , F11(snmv''u'') enfin F12 (stuu'u'').

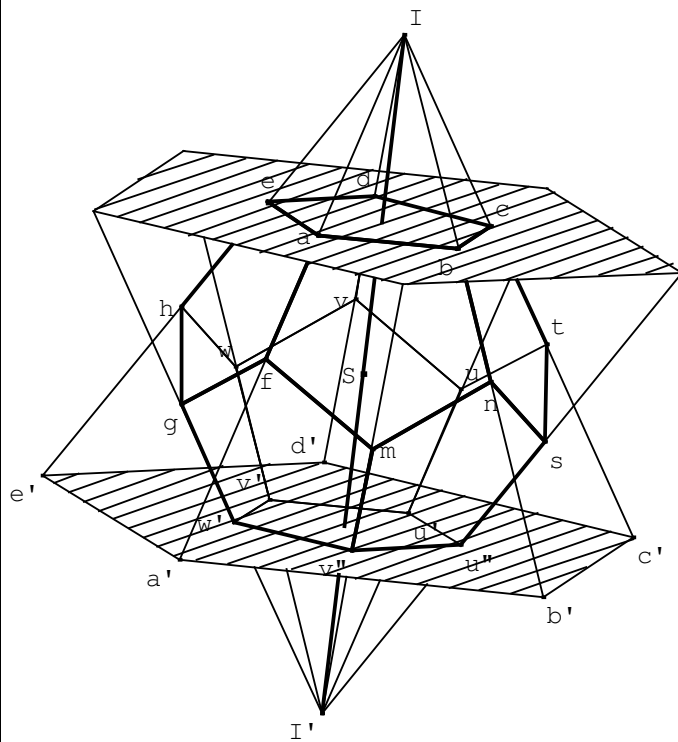
FIG 14 : polyèdre Σ obtenu après la génération des douze faces pentagonales. Les 12 faces F_i sont distinguées ici par la projection orthogonale q_i de S sur chacune d'elles.



Nous appelons q_i , $1 \leq i \leq 12$, les centres des pentagones réguliers i . Les 20 sommets sont noté a, b, c , d, e, f, ,g, h, m, n s, t, u,u', u'' , v, , v', v'' , w, w'.

- 6 Les douze pentagones réguliers ainsi assemblés de F1 à F12 forment un polyèdre convexe et compact. Intersection de deux pyramides.

FIG 15



Soit V le solide (tronc de pyramide) limité par la pyramide régulière pentagonale de sommet I dont l'axe est (Sq1) et dont la base est dans le plan de la face 10 (u'v'w'v''u'') (FIG15) ; soit V' le solide limité par la pyramide régulière de sommet I' et dont la base est dans le plan de la face 1(abcde).

Ces deux solides sont convexes donc leur intersection est également convexe : c'est le polyèdre Σ dont les faces sont les 12 pentagones réguliers, **il est donc convexe**. Ce polyèdre Σ est **compact** puisqu'il est inscrit dans la sphère de centre S et de rayon Sa. Nous avons vu, conséquence des propriétés de la rotation, que ses 12 faces sont des pentagones réguliers égaux entre eux ; les angles trièdres en chacun des 20 sommets sont réguliers et tous égaux à $a(efb)$: c'est donc un dodécaèdre régulier. (FIG 16)

CRISTAUX ISSUS DU SYSTEME CUBIQUE

Nous avons été inspirés pour la réalisation de ce travail par l'ouvrage " PAVES et BULLES, éléments de cristallographie mathématique " de Françoise Pécaut (chapitre IV) publié par l'APMEP en 1977. Citons-la.

“ Un morceau de cristal cristallisé naturellement, ou d'une substance cristallisée en laboratoire , se présente sous la forme d'un polyèdre irrégulier dont les faces sont la frontière naturelle entre le milieu cristallin et le milieu extérieur ; c'est un fait expérimental, connu depuis longtemps, que les angles des faces entre elles, pour tout échantillon d'une même espèce sont les mêmes.

C'est dire que si la structure interne du milieu cristallin admet d'être limitée par un plan, défini par cassure, par clivage, ou croissance spontanée, alors les autres faces planes ont des directions déduites de la première par rotation ou rotation-réflexion dont les angles, les axes, les miroirs ne dépendent pas de l'échantillon pour une même composition chimique. On a donc supposé puis vérifié que la structure interne reste invariante par un groupe d'isométries. ”

La notion de groupe s'est dégagée en cristallographie au XIXe siècle à travers les travaux de Bravais, qui effectue un travail purement géométrique d'étude des symétries conservant un réseau tridimensionnel avec la pensée de s'en servir ultérieurement pour approfondir le travail de ses prédécesseurs et expliquer les faits physiques fondamentaux de la cristallographie. Il trouve 7 systèmes cristallins, le système auquel appartient un cristal étant défini par le groupe d'isométries de sa structure interne.

Pour un cristal du système cubique (la maille du réseau est un cube), si irrégulier soit-il, les directions des plans des faces appartiennent à l'orbite de l'une d'entre elles par l'un de cinq sous-groupes particuliers du groupe du cube qui sont ceux possédant au moins deux rotations d'axes distincts et qui ne sont pas des demi-tours (ceci est dû à des considérations d'optique physique).

Les formes possibles les plus régulières d'un cristal du système cubique sont obtenues avec des faces équidistantes d'une origine choisie, c'est ce que nous ferons en résolvant l'exercice pratique proposé dans la brochure précitée. On fixera un cube centré en O, origine des coordonnées, et le repère associé O(I,J,K) , I, J, K étant les centres de faces du cube, on partira d'un plan arbitraire P, et pour tout groupe H du type précédent on construira les plans f(P), f décrivant H, on montrera que le solide convexe limité par tous ces plans est un polyèdre à faces égales, forme régulière d'un cristal du système cubique dont on aura toutes les formes possibles en variant les plans P.

Geospacw aura à couper des demi-espaces fermés, ce qu'il ne peut faire ; l'argument théorique qui montre que la forme obtenue est un polyèdre convexe fermé et borné mettra en évidence la boîte cubique dans laquelle on le fera opérer sans crainte de perdre des données. Sa pauvreté en texte nous amènera aussi à entrer la donnée des plans sous forme analytique. Cela évite également d'avoir à considérer géométriquement les isométries du cube ; il suffira de les considérer par leur effet sur le repère. Ce travail qui relève de l'algèbre linéaire se fait très simplement à la main.

De la même manière les formes les plus régulières que l'on voit apparaître : cube, octaèdre et dodécaèdre rhomboïdal sont prévisibles grâce à des raisonnements analytiques très simples.

Ce travail sur la machine est préparé par des considérations minimales sur les isométries du tétraèdre et du cube.

On voit les intérêts mathématiques et pédagogiques de cet exemple : aller et retour interactif entre le logiciel et le raisonnement, articulation du raisonnement géométrique avec la représentation analytique et les contraintes de commandes de la machine.

Outre cela, la construction de ces solides, via l'ordinateur, peut nous aider à les voir sous divers angles, en saisir les régularités et la beauté.

CONSTRUCTION DES CINQ FORMES REGULIERES LES PLUS GENERALES DU SYSTEME CUBIQUE

Les dessins sont tous réalisés avec le logiciel *geospacw*.

I - Représentation du cube et des deux tétraèdres réguliers associés - Notations.

Soit le cube solide C de côté 2 et $\mathfrak{R}(O,I,J,K)$ le repère orthonormé lié au cube (FIG 1). O est le centre du cube, les points I, J et K sont les centres de trois faces adjacentes du cube tels que (O,I,J,K) soit de sens direct selon l'orientation de l'espace E que nous avons choisie. Pour tout point M de l'espace E : $M(x,y,z) \in C \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 ; -1 \leq y \leq 1 ; -1 \leq z \leq 1$. Les notations sont fixées dans la représentation ci-dessous.

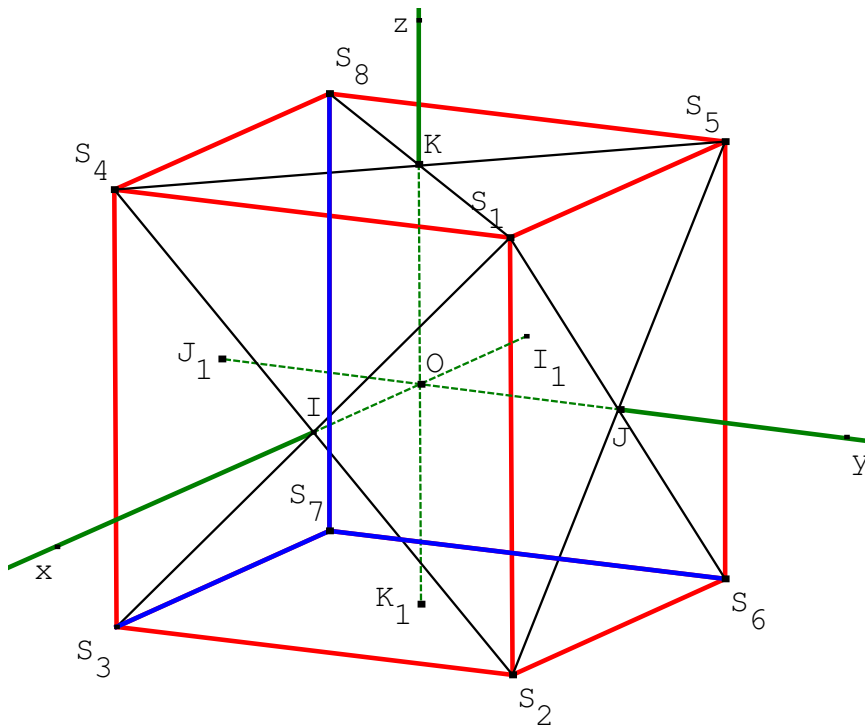


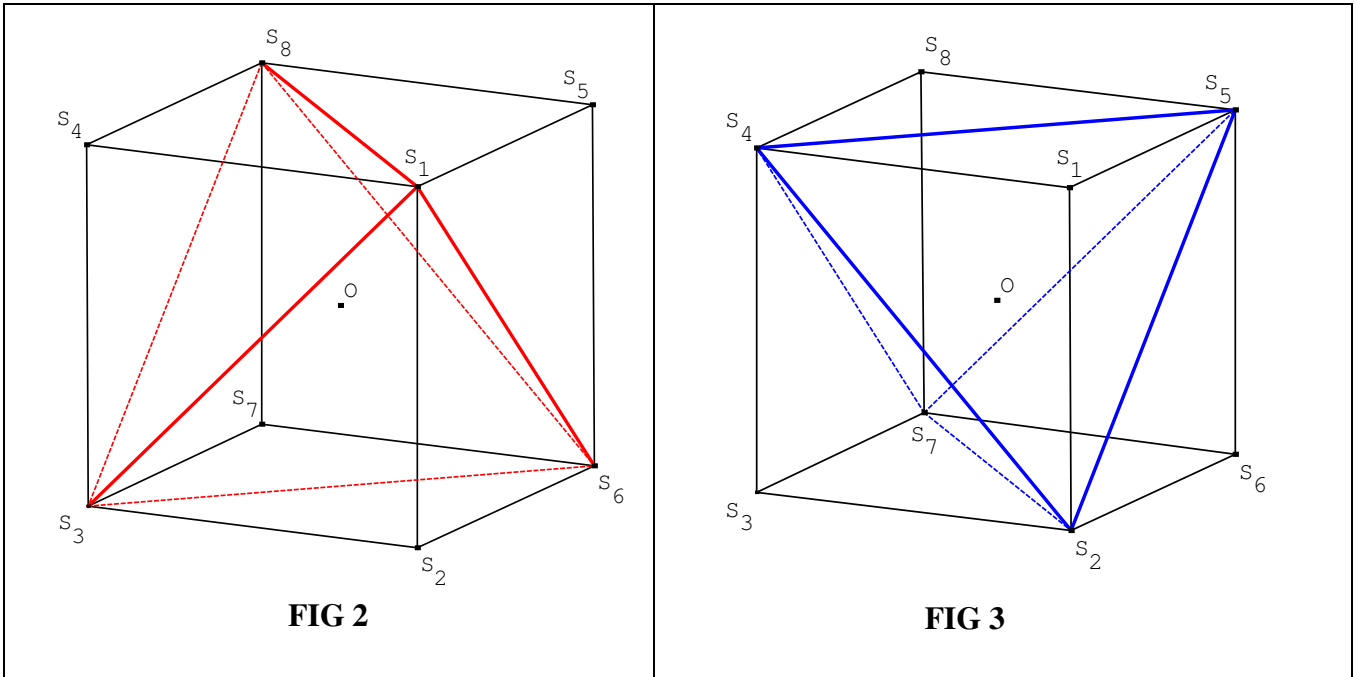
FIG 1

Le cube contient deux tétraèdres réguliers inscrits t et t' et **deux seulement** dont les sommets sont communs avec ceux du cube. En effet les arêtes joignant deux sommets du cube sont nécessairement choisies parmi les diagonales des faces de longueur $2\sqrt{2}$ sinon le tétraèdre construit ne sera pas régulier. Partons de S_1 : seuls trois sommets du cube S_3, S_8 et S_6 conviennent pour le premier t . La sphère S est également circonscrite au tétraèdre t . Les quatre autres sommets sont donc nécessairement (S_7, S_2, S_4, S_5) ; ils forment en effet un tétraèdre régulier t' . Le tétraèdre t' est le symétrique de t par rapport au centre O du cube.

Inversement de tout tétraèdre régulier t , on peut déduire un cube et un seul avec lequel le tétraèdre ait tous ses sommets communs : en effet si S est la sphère de centre O (FIG1) et de rayon OS_1 , les autres sommets du cube seront ceux du tétraèdre t' symétrique de t par rapport au centre de la sphère S .

Sur les **FIG 2 et 3** sont dessinés les deux tétraèdres inscrits dans le cube : $t(S_1S_3S_6S_8)$ et $t'(S_7S_2S_4S_5)$. Les droites S_1S_7 et S_7S_1 sont les axes des triangles équilatéraux $S_3S_8S_6$ et $S_2S_4S_5$; ces triangles sont les faces de t et t' opposées respectivement à S_1 et S_7

Chaque diagonale du cube est une médiane-hauteur des deux tétraèdres, les centres de gravité des tétraèdres sont confondus avec O le centre du cube. Soit une diagonale du cube telle (S_1S_7) et les points O , O_1 et O_2 respectivement isobarycentres du cube, et des triangles équilatéraux $S_3S_8S_6$ et $S_2S_4S_5$. Ces points sont tels que : $S_7O_1 = O_1O_2 = O_2S_1 = \frac{S_1S_7}{3}$.



II - Rappels sur le groupe G des 48 isométries du cube

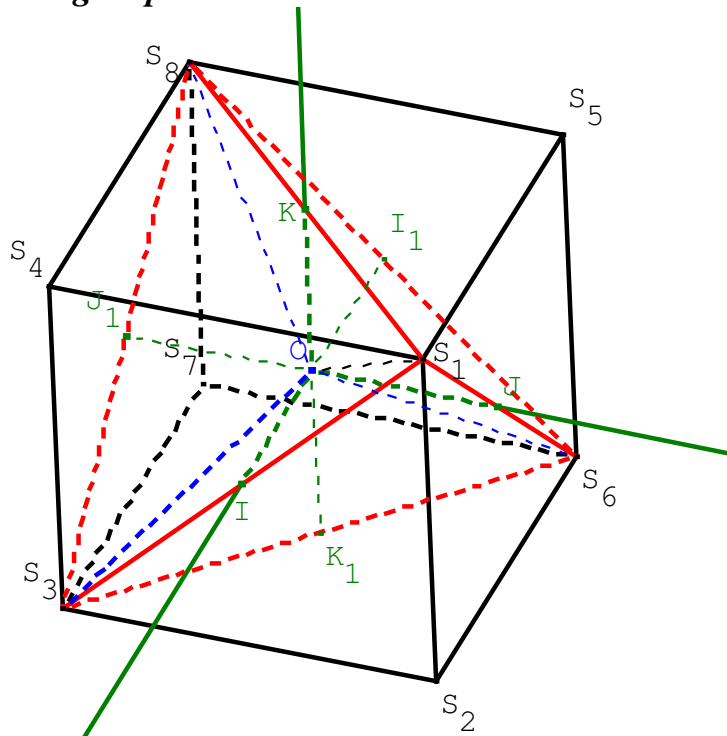


FIG 4

Nous considérons le cube comme un solide (intersection de 6 demi-espaces fermés contenant O). Une isométrie du cube conserve globalement les diagonales, telle $[S_1S_7]$ de longueur $2\sqrt{3}$, les arêtes, les faces du cube, les sommets et le centre O du cube C . Inversement, une isométrie de point fixe O conservant les sommets du cube conserve l'ensemble des arêtes, l'ensemble des faces et finalement le cube. On en déduit que pour que le cube C soit invariant par une isométrie f de l'espace il faut et il suffit que ses huit sommets soient globalement invariants par f .

Pour caractériser les isométries conservant le cube, il suffit donc de caractériser les isométries conservant l'ensemble des 8 sommets, et le groupe G du cube est donc fini.

Puisque la symétrie s de centre O , qui est un anti-déplacement, conserve C , tout anti-déplacement conservant C s'écrira sof , où f est un déplacement (donc une rotation d'axe passant par O et conservant C). L'ordre de G est donc le double de l'ordre de G^+ , groupe des rotations conservant C .

1 - En considérant le repère associé au cube

Sachant qu'une isométrie est caractérisée de façon unique par l'image \mathfrak{R}' d'un repère orthonormal, si f est une isométrie du cube, elle sera déterminée par l'image du repère orthonormal direct $\mathfrak{R}(O, \vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$ associé au cube (**FIG 1**). De plus, O étant invariant par f et les centres des faces étant globalement invariants, le repère orthonormé image $\mathfrak{R}'(O, \vec{OU}, \vec{OV}, \vec{OW})$ où U, V et W sont centres de faces du cube, est tel que les vecteurs \vec{OU}, \vec{OV} et \vec{OW} sont choisis dans l'ensemble $\{ \pm \vec{OI}, \pm \vec{OJ}, \pm \vec{OK} \}$

Il y a $3! = 6$ permutations des trois vecteurs $(\vec{OU}, \vec{OV}, \vec{OW})$. Une permutation étant choisie, l'attribution d'un signe à chacun des vecteurs est une application de $\{1, 2, 3\}$ sur $\{+1, -1\}$. Il y a $2^3 = 8$ telles applications, donc 6 fois 8 = 48 isométries conservant le cube. G compte donc 48 éléments et le sous-groupe des rotations en compte 24.

2 – En considérant les deux tétraèdres inscrits dans le cube

Isométries des deux tétraèdres inscrits dans le cube C

Soit T le groupe des isométries du tétraèdre, f une isométrie qui conserve t : $f(t) = t$ et s la symétrie centrale par rapport à O $t' = s(t)$. Or s , homothétie de centre O et de rapport -1 , commute avec toutes les isométries dont O est un point fixe : $f \circ s = s \circ f$ et $f(t') = s(t) = t'$.

Ainsi toute isométrie qui conserve t conserve aussi t' . Par suite une telle isométrie conservant t et t' conserve le cube C .

Inversement, une isométrie du cube, si elle ne conserve pas t , l'envoie sur un tétraèdre régulier distinct de t et inscrit dans le cube donc nécessairement sur t' ; **l'ensemble de telles isométries est sT et l'ordre de G est le double de celui de T .**

Nous distinguerons désormais parmi les isométries du cube celles de T qui laissent invariant les tétraèdres t et t' et les autres de $G-T$. Les isométries de $G-T$ ne peuvent donc qu'échanger t et t' .

Précisons les caractéristiques géométriques des rotations de G^+ du cube C

D'après le paragraphe précédent, le groupe T des isométries conservant t et t' est d'ordre 24. L'existence d'une réflexion conservant t est assurée donc le sous groupe T^+ des rotations de t est d'ordre 12. Il est aisé d'énumérer 12 rotations dans T . En effet tout d'abord les 8 d'ordre

3 : Chacun des 4 sommets de t génère deux rotations d'axe une médiane-hauteur de ce tétraèdre t (diagonale du cube) et d'angle un tiers de tour dans un sens puis dans l'autre. Ajoutons les trois demi-tours joignant les milieux des arêtes opposées de t et qui sont en fait les demi-tours dont l'axe est porté par les axes du cube Π_1, JJ_1 et KK_1 (**FIG 4**). Enfin l'identité. Ainsi le groupe T^+ est d'ordre 12. Pour définir G^+ il suffit d'adjoindre à T^+ les rotations qui échangent t et t' ; notons leur ensemble T^* , on a $T^* = rT^+$, r étant une rotation de G envoyant t sur t' , par exemple la quart de tour d'axe OI qui envoie S_1 sur S_2 . Mais $T^+ \cup T^*$ est un ensemble de rotations de G^+ à 24 éléments, c'est donc G^+ . Si s est la symétrie de centre O , alors $G = G^+ \cup sG^+$.

On peut reconnaître aussi géométriquement les 24 rotations de G . On énumère en effet facilement : l'identité, autour de chacune des quatre diagonales 2 rotations d'ordre 3, autour de chacun des trois axes 2 rotations d'ordre 4 et 1 rotation d'ordre 2, autour de chacune des six médianes une rotation d'ordre 2, ce qui fait $1 + 9 + 8 + 6 = 24$ rotations, c'est-à-dire toutes.

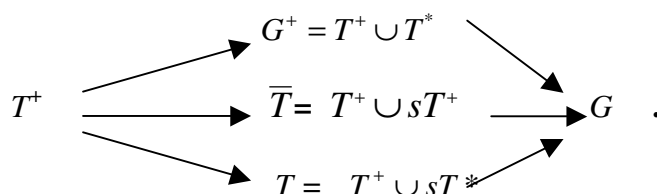
III - Les cinq sous-groupes associés au système cubique

Nous aurons à considérer les sous-groupes H de G^+ contenant deux rotations d'axes distincts et d'ordres différents de 2 ; un raisonnement cas par cas, consistant à composer des transformations de H , permet de montrer qu'alors H contient T^+ .

- Si H contient deux rotations d'ordre 3 d'axes distincts, par composition on trouve d'abord que H contient les rotations d'ordre 2 de T^+ puis T^+ .
- Si H contient deux rotations d'ordre 4 d'axes distincts, par composition il contient deux rotations d'ordre 3 d'axes distincts.
- Si H contient une rotation d'ordre 3 et une rotation d'ordre 4 d'axes distincts, par composition, on se ramène au cas précédent.

Cherchons donc les sous-groupes de G contenant T^+ (ceux qui sont distincts de T^+ et G ne peuvent avoir qu'un ordre égal à 24, ce que l'on va vérifier sans idée a priori).

- Si un tel sous-groupe distinct de T^+ ne contient que des rotations, il en contient une qui envoie t sur t' , donc il contient $T^* = rT^+$, et c'est donc G^+ .
- Si un tel sous-groupe contient un anti-déplacement conservant t , il les contient tous et c'est $T = T^+ \cup sT^*$.
- Si un tel sous-groupe contient un anti-déplacement envoyant t sur t' , il les contient tous et c'est $\bar{T} = T^+ \cup sT^+$.



Nous allons montrer que ces cinq groupes T^+ , $G^+ = T^+ \cup T^*$, $\bar{T} = T^+ \cup sT^+$, $T = T^+ \cup sT^*$ et G , en opérant sur un plan sont "représentés" par des polyèdres convexes et compacts de l'espace appelés "cristaux" du système cubique. Notre objectif est de construire, à l'aide du logiciel *geospacw*, certaines des CINQ formes régulières du système cubique.

IV – Préparation à la construction de formes cristallines du système cubique

Appelons de manière générale H l'un des sous- groupes précédemment cités. Soit δ son ordre ($\delta = 12, 24$ ou 48) et soit P_0 un plan ne passant pas par O ; ce plan limite un demi-espace fermé contenant O : E_0 , dont on va considérer les images par H . L'intersection de ces images sera un solide fermé, convexe et compact, forme cristalline du système cubique.

Nous allons rendre compte de ces formes à l'aide de *geospacw*, en nous plaçant, comme les limites du logiciel nous le commandent d'un point de vue analytique.

1- équations des images d'un plan par une isométrie du cube.

Un vecteur $\vec{V} = a\vec{OI} + b\vec{OJ} + c\vec{OK}$ a pour image par une isométrie f du cube le vecteur

$\vec{V}' = a'\vec{OI} + b'\vec{OJ} + c'\vec{OK}$ où (a', b', c') est obtenu par une permutation de (a, b, c) , chaque lettres

étant ensuite affectée du signe $+$ ou $-$. Ainsi un plan P normal à \vec{V} d'équation $ax + by + cz + d = 0$ a pour image un plan P' d'équation $a'x + b'y + c'z + d' = 0$. Si M est un point de P et M' son image

par f un point de P' on a : $\vec{OM} \cdot \vec{V} + d = 0$ et $\vec{OM}' \cdot \vec{V}' + d' = 0$. L'isométrie conservant le produit scalaire, il vient donc $d = d'$.

Par exemple si r_1 est la rotation d'ordre 2 d'axe OI , elle envoie le repère initial sur (O, I, J', K')

donc $\vec{V}' = a\vec{OI} - b\vec{OJ} - c\vec{OK}$. Ainsi le plan P_0 d'équation $3x + 2y + z - 6 = 0$ et passant par le sommet S_1 du cube C a pour vecteur normal $(3, 2, 1)$; son image par la rotation r_1 aura donc pour équation $3x - 2y - z - 6 = 0$.

Le choix de P_0

Ce plan P_0 est choisi ici de façon que la seule isométrie du cube qui le conserve soit l'identité ; son orbite par H sera donc composé de δ plans deux à deux distincts. Montrons cela. Le plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est laissé invariant par une rotation du cube si et seulement si \vec{V} de composantes (a, b, c) dirige un axe de rotation ; il est laissé invariant par un anti-déplacement (qui ne peut être qu'une réflexion) si et seulement si il est orthogonal à un axe de demi-tour. On examine ces différents cas.

- \vec{V} dirige un axe de rotation d'ordre 3, alors \vec{V} est colinéaire à un vecteur de composantes $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ et les trois nombres réels a, b, c sont égaux en valeur absolue.
- \vec{V} dirige un axe de rotation d'ordre 4, il est alors colinéaire à un vecteur de base et deux des trois nombres a, b, c sont nuls.
- \vec{V} dirige un axe de rotation d'ordre 2 et \vec{V} est colinéaire à une bissectrice des axes du repère, deux des nombres sont égaux en valeur absolue et le troisième est nul.
- \vec{V} est orthogonal à un axe de rotation d'ordre 2 et la condition s'exprime sur a, b, c comme dans le cas précédent.

2- Propriété du solide engendré par l'orbite de P_0 par le groupe H

L'orbite de P_0 va donner δ autres plans passant par un sommet du cube puisque les éléments de H conservent le cube, donc en particulier ses sommets ; notons $\text{Orb}(P) = \{P_0, P_1, \dots, P_{\delta-1}\}$.

Soit O' la projection orthogonale de O sur le plan P_0 : l'équation de P_0 permet le calcul de la distance $e = OO' = \frac{6}{\sqrt{14}}$. Les plans images de P_0 seront tous à la distance e de O par

conservation de la distance par isométrie. Ces δ plans sont donc tangents à la sphère de centre O et de rayon e . Le centre O est invariant par toute isométrie de ce groupe. Les

rotations de H transforment P_0 en P_j ($1 \leq j \leq \delta-1$): donc le demi-espace fermé E_0 contenant O de frontière P_0 aura pour image le demi-espace fermé E_j contenant O et de frontière P_j . L'intersection Σ de ces demi-espaces fermés convexes est donc un fermé convexe de l'espace euclidien E .

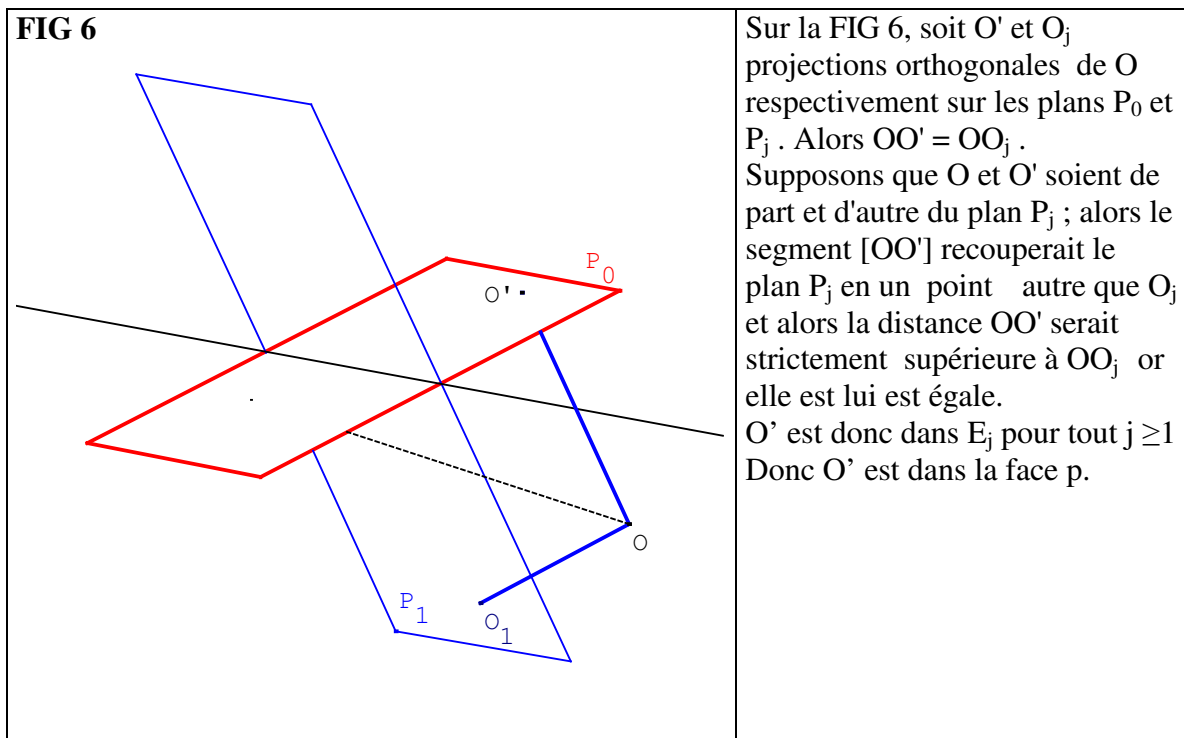
a) Σ est donc un polyèdre convexe et fermé de E . Sa frontière dans E est constituée de parties contenues dans les plans images P_j ; j variant de 0 à δ ; on appellera ces parties les faces de Σ .

b) Comment sont organisées les faces de ce polyèdre Σ ?

Soit p la face du polyèdre située dans le plan P_0 ; c'est l'intersection de Σ avec P_0 . On peut écrire : $p = (\bigcap_{0 \leq j \leq \delta-1} E_j) \cap P_0 = \bigcap_{1 \leq j \leq \delta-1} (E_j \cap P_0)$.

$P_0 \cap E_j$ est un demi-plan fermé de frontière la droite D_j . Donc la face p est un polygone convexe et fermé comme intersection finie des demi-plans convexes et fermés.

Montrons que la projection orthogonale de O sur P_0 est nécessairement incluse dans la face p .



Soit r la rotation envoyant P_0 sur P_k , r est bijective donc l'image de la face p vérifie : $r(p) = r(P_0) \bigcap_{1 \leq j \leq \delta-1} r(E_j)$; or l'ensemble $r(E_j)$ est encore l'ensemble des E_j il vient donc :

$r(p) = P_k \bigcap_{1 \leq j \leq \delta-1} E_j = P_k \cap \Sigma = p_k$. Ainsi les faces de Σ se déduisent de p par les rotations du groupe opérant : les faces du polyèdre Σ sont donc toutes égales entre elles.

c) le polyèdre est-il compact ?

H , quel qu'il soit, contient les trois demi-tours d'axes respectifs, OI , OJ et OK . On pourra écrire l'équation d'un plan p en position générale sous la forme $ax+by+cz = d$ avec $d > 0$ et abc non nul. Le demi-espace contenant O a pour inéquation $d \geq ax+by+cz$ et les images respectives par les trois demi-tours précités sont $d \geq ax - by - cz$, $d \geq -ax+ by - cz$, $d \geq -ax - by$

+cz, leur intersection est donc contenue dans le pavé $|ax| \leq d, |by| \leq d, |cz| \leq d$. Donc dans tous les cas, la forme obtenue sera un polyèdre fermé, convexe et compact.

Cette remarque montre que dans l'exemple du plan P_0 , la forme est contenue dans le cube $C' : |x| \leq 6, |y| \leq 6, |z| \leq 6$.

V - Construction des formes cristallines du système cubique.

Le logiciel ne permet pas, sans modification de la programmation, de construire la forme du solide comme intersection de demi-espaces. Pour contourner cette difficulté, il suffit de travailler dans le cube C' dont on sait qu'il contient le polyèdre final. Les intersections faites par la machine seront celles des polyèdres du type $C' \cap E_j$

1 - Action du groupe T^+ sur P_0 : le dodécaèdre pentagonal tétraédrique

On exécute systématiquement le calcul présenté en IV.1.

Notons pour être précis les équations des 11 plans transformés de P_0 et les propriétés de la forme obtenue.

- r_1 Rotation d'ordre 2 et d'axe OI envoie (I,J,K) sur (I, J₁, K₁) donc $P_1 : 3x-2y-z-6=0$
- r_2 Rotation d'ordre 2 et d'axe OJ envoie (I,J,K) sur (I₁, J, K₁) donc $P_2 : -3x+2y-z-6=0$
- r_3 Rotation d'ordre 2 et d'axe OK envoie (I,J,K) sur (I₁, J₁, K) donc $P_3 : -3x-2y+z-6=0$
- r_4 Rotation d'ordre 3 et d'axe OS₁ envoie (I,J,K) sur (K,I,J) donc $P_4 : x+3y+2z-6=0$
- r_5 Rotation d'ordre 3 et d'axe OS₁ envoie (I,J,K) sur (J, K, I) donc $P_5 : 2x+y+3z-6=0$
- r_6 Rotation d'ordre 3 et d'axe OS₃ envoie (I,J,K) sur (J₁,K,I₁) donc $P_6 : -2x+y-3z-6=0$
- r_7 Rotation d'ordre 3 et d'axe OS₃ envoie (I,J,K) sur (K₁,I₁,J) donc $P_7 : -x-3y+2z-6=0$
- r_8 Rotation d'ordre 3 et d'axe OS₆ envoie (I,J,K) sur (J,K₁,I₁) donc $P_8 : 2x-y-3z-6=0$
- r_9 Rotation d'ordre 3 et d'axe OS₆ envoie (I,J,K) sur (K,I₁,J₁) donc $P_9 : x-3y-2z-6=0$
- r_{10} Rotation d'ordre 3 et d'axe OS₈ envoie (I,J,K) sur (J,K₁,I₁) donc $P_{10} : 2x-y-3z-6=0$
- r_{11} Rotation d'ordre 3 et d'axe OS₈ envoie (I,J,K) sur (K₁,I₁,J) donc $P_{11} : -x+2y-3z-6=0$

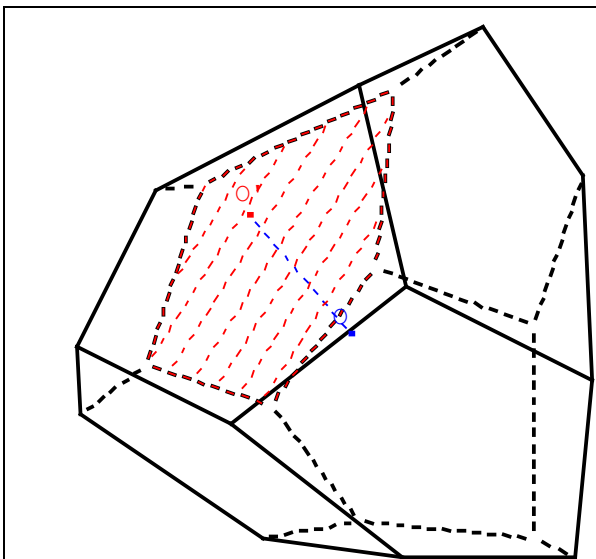


FIG 7 : le dodécaèdre pentagonal tétraédrique
L'intersection des douze demi-espaces fermés donne par *geospacw* le solide Σ ci-dessus

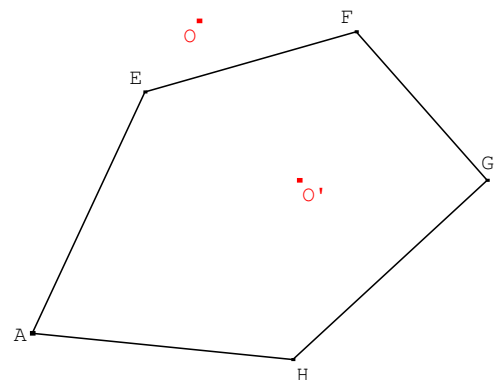
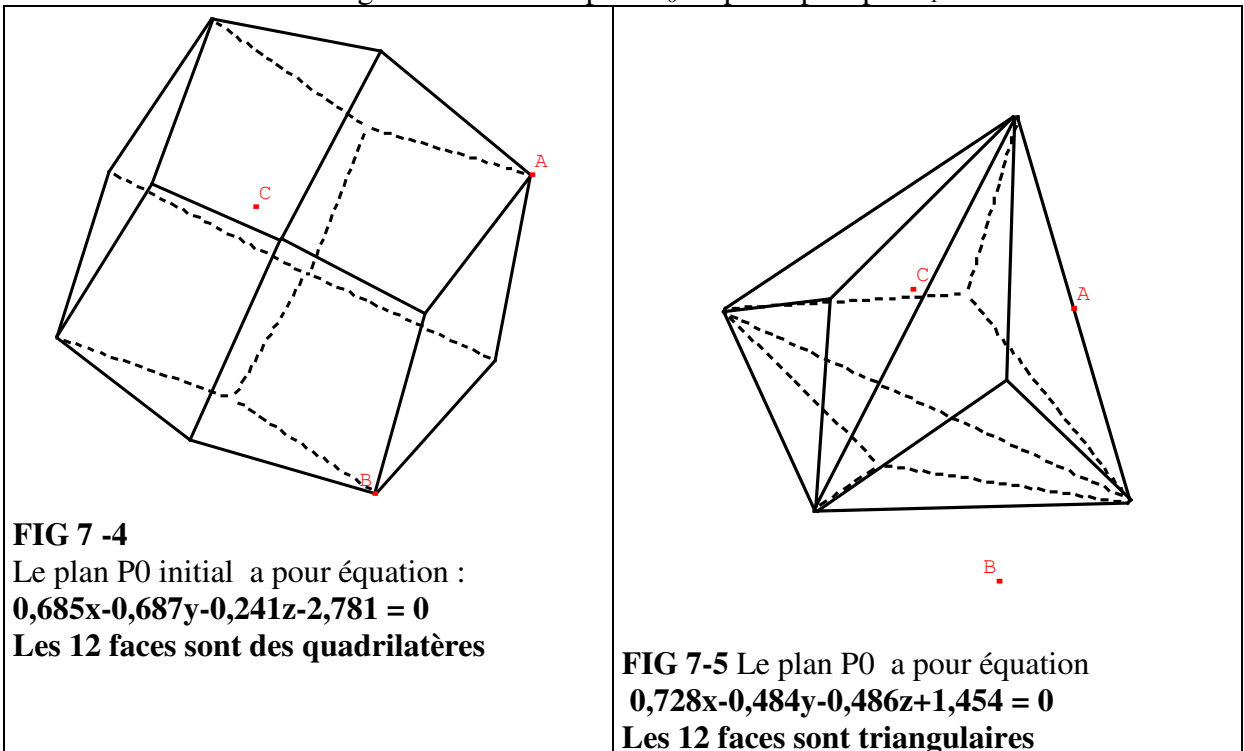


FIG7 bis

La face $p(AEFGH)$ ci-dessus est **un pentagone non régulier** : le logiciel permet de calculer les côtés de p : $EF = FG = 0,866$; $GH = 1,039$; $AH = AE = 1,072$

REMARQUE : Changeons le plan initial P_0 , en évitant pour l'instant, dans les deux cas suivants (FIG 7-4 et 7-5), les plans invariants par un sous-groupe de T qui ne donne pas un polyèdre à douze faces. Par exemple, si A, B et C sont les intersections de P_0 avec les axes de coordonnées, on peut faire varier les points A ou B ou C sur la figure *geospacw* de façon, que la « forme » des faces changent. Le nouveau plan P_0 ne passe plus par S_1 .



2 - Action du groupe $G^+ = T^+ \cup T^*$ sur P : le gyroèdre

Il n'est pas utile d'entrer dans le détail de la nature géométrique des éléments de G^+ , il suffit de noter les effets de $T^* = rT^+$ (cf III) sur I,J,K ; on l'a fait pour T^+ et on sait que r envoie I,J,K respectivement sur I_1, J_1, K_1 . On doit obtenir un solide à 24 faces dont 12 sont contenues dans les faces du solide précédent. En agissant comme au paragraphe précédent, on obtient :

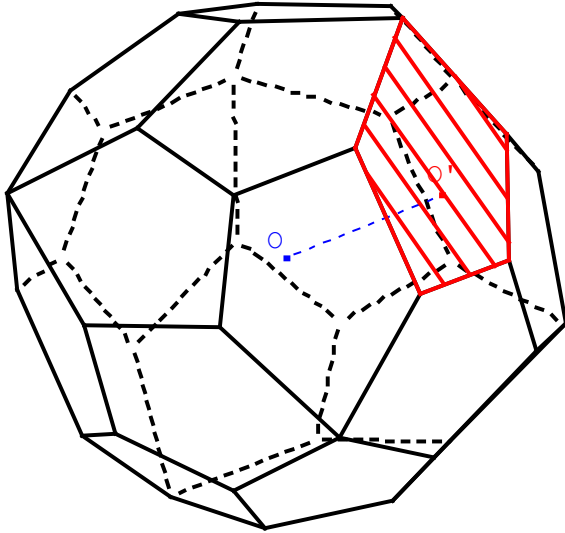


FIG 8 : Le gyroèdre à 24 faces (des pentagones non réguliers).

3 - Action du groupe $T=T^+ \cup sT^+$ sur le plan P : le diploèdre

Il suffit là encore de noter les effets de sT^+ sur I, J, K , sachant que s envoie ces trois points respectivement sur I_1, J_1, K_1 . On obtient un polyèdre à 24 faces.

Le diploèdre. L'intersection des 24 demi-espaces (P_j, O) donne le polyèdre Σ . La face du solide est ici un quadrilatère q_0 intersection de Σ avec le plan P_0 .

FIG 9. Le Diploèdre. Les douze faces à l'avant sont en trait épais et les douze faces à l'arrière en pointillé.

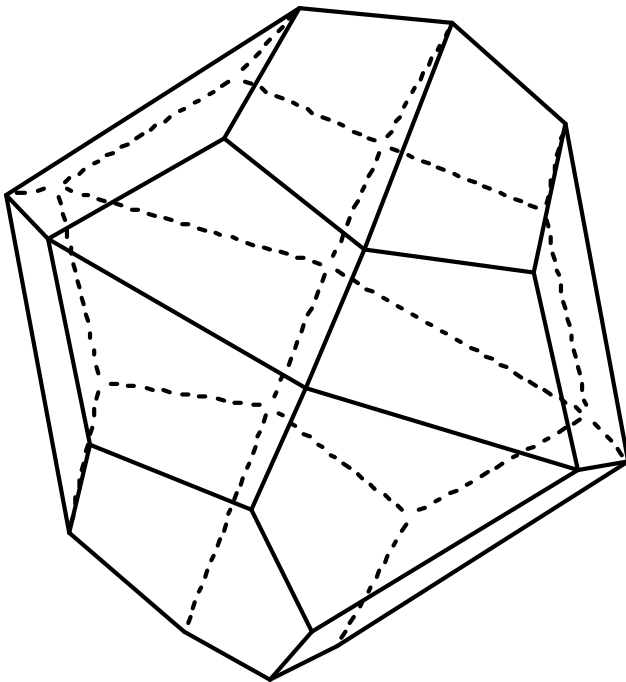
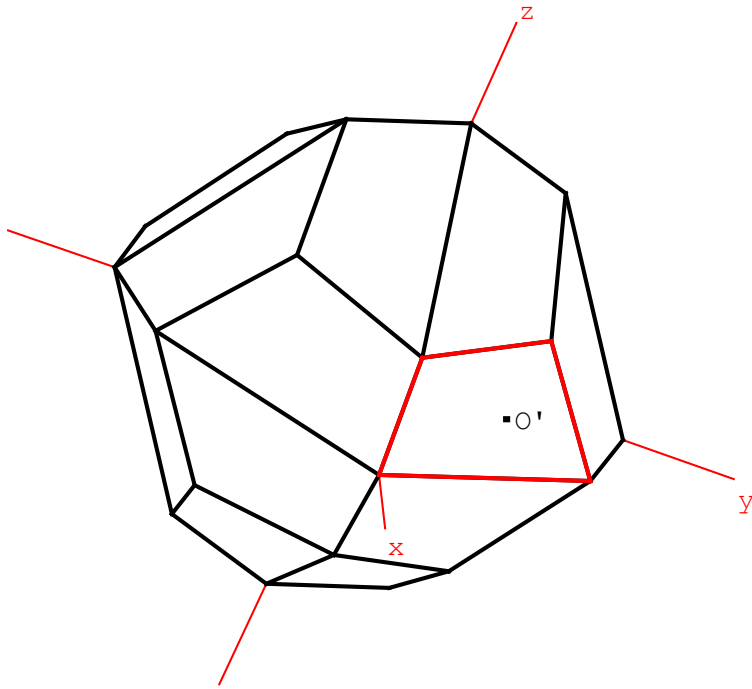


FIG 9 bis. Le Diploèdre



4 - Action du groupe T sur le plan P_0 : l'hexatétraèdre

L'ensemble des anti-déplacements de T est fT où f est une réflexion conservant T , par exemple celle de miroir le plan $(O S_1 S_6)$, qui envoie respectivement I, J, K sur K, J, I . On applique toujours la même technique.

FIG 10 L'hexatétraèdre . Les 24 faces sont des triangles égaux ; les faces à l'avant sont en traits épais. Les faces à l'arrière sont en pointillés.

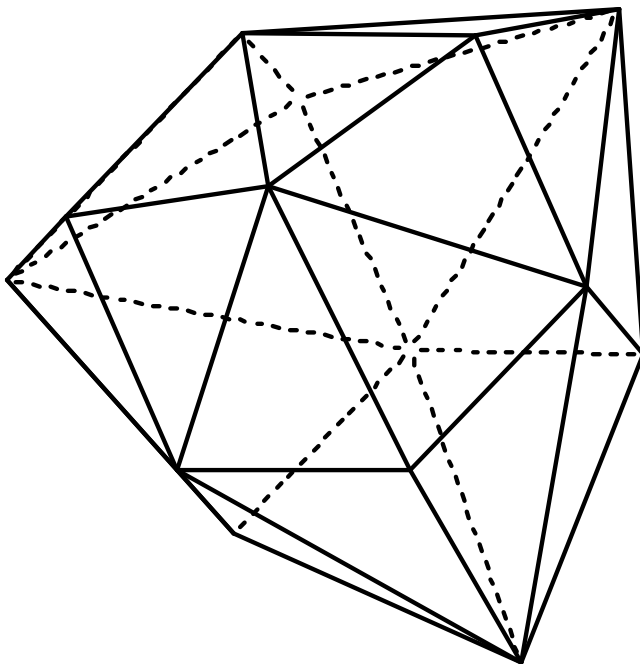
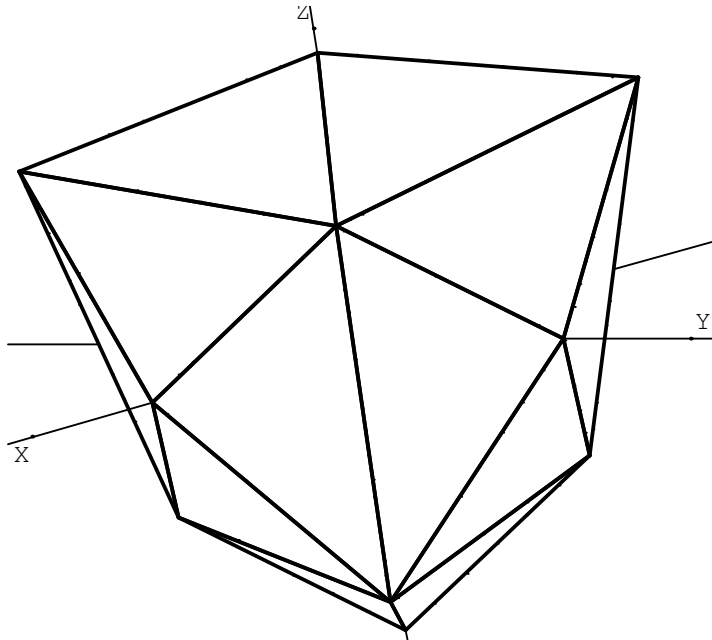


FIG 10 bis. *L'hexatétraèdre.*

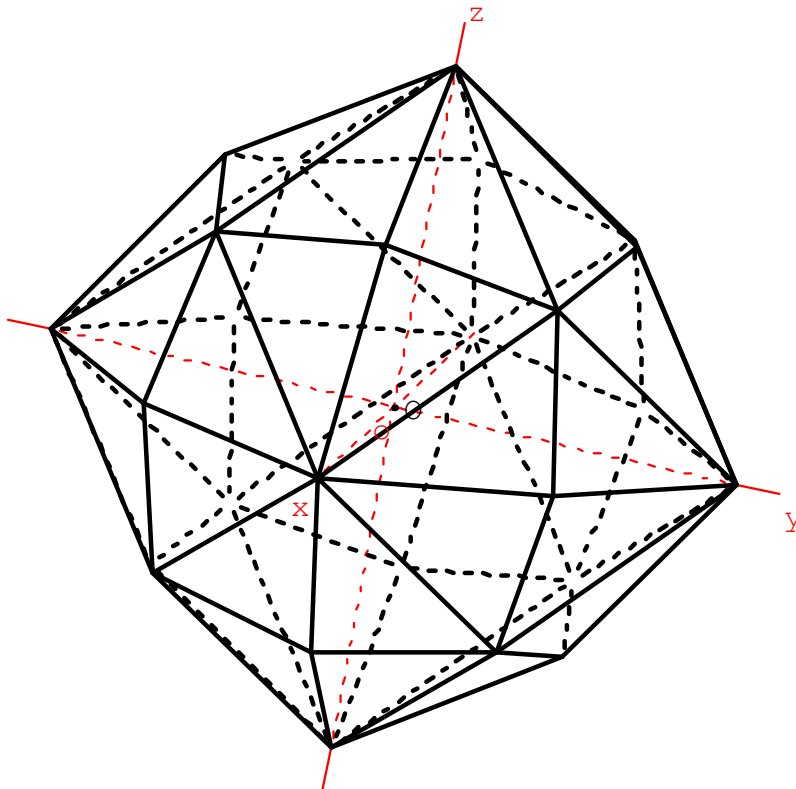


5 - Action du groupe G sur le plan P_0 :

Comme $G = G^+ \cup G^-$, il suffit de reprendre les intersections des demi-espaces en utilisant les résultats des paragraphes 3 et 4 ci-dessus ; on obtient un solide à 48 faces.

FIG 11. *L'hexoctaèdre*

Les 48 faces du solide sont triangulaires, les faces "cachées" sont en pointillé.



VI - Cas particulier : le plan P est invariant par une rotation du sous groupe G^+ .

1 - Recherchons les plans P en suivant la caractérisation donnée en IV, le vecteur \vec{V} désignant le vecteur normal à P . Trois cas sont possibles :

- \vec{V} dirige l'axe d'une rotation d'ordre 4, par exemple de composantes $(1,0,0)$.
- \vec{V} dirige l'axe d'une rotation d'ordre 2, par exemple de composantes $(0, 1, -1)$.
- \vec{V} dirige l'axe d'une rotation d'ordre 3, par exemple de composantes $(1,1,1)$.

Les plans P correspondants sont :

- un plan P_1 du type i) et passant par S_1 : son équation est $x-1=0$,
- un plan P_2 du type ii) et passant par S_2 : son équation est $y - z = 2$,
- un plan P_3 du type iii) et passant par S_1 : son équation est $x + y + z - 3 = 0$.

On peut voir le nombre de faces du polyèdre soit en identifiant le stabilisateur de P , soit en écrivant les équations des plans de l'orbite, ce qui est plus simple.

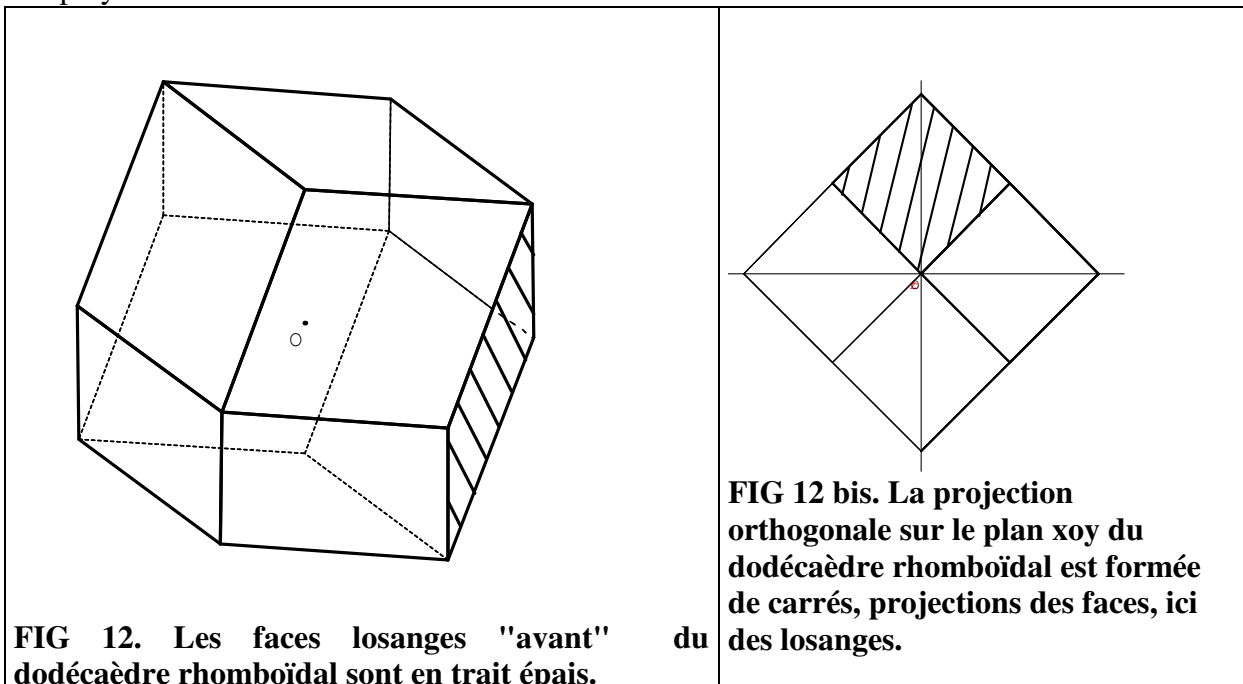
2 - premier cas : P_1 d'équation $x = 1$

Les équations des images sont $x = \pm 1, y = \pm 1, z = \pm 1$, on obtient donc le **cube initial C**.

3 - deuxième cas : P_2 d'équation $y - z = 2$

Les équations des images sont $y \pm z = \pm 2, x \pm z = \pm 2, x \pm y = \pm 2$, le polyèdre aura donc 12 faces. La face contenue dans P_2 contient en son intérieur (cf : IV,2) la projection de O , de coordonnées $(0,1,-1)$. La projection de cette face sur le plan xOy contiendra donc le point $(0,1)$ en son intérieur. On calcule facilement que cette projection est le carré de sommets : $(0,0), (1,1), (0,2), (-1,1)$. Cette face est donc un parallélogramme dont on vérifie sans peine l'égalité des côtés ; donc c'est un losange (il suffit de calculer les coordonnées de ce losange !).

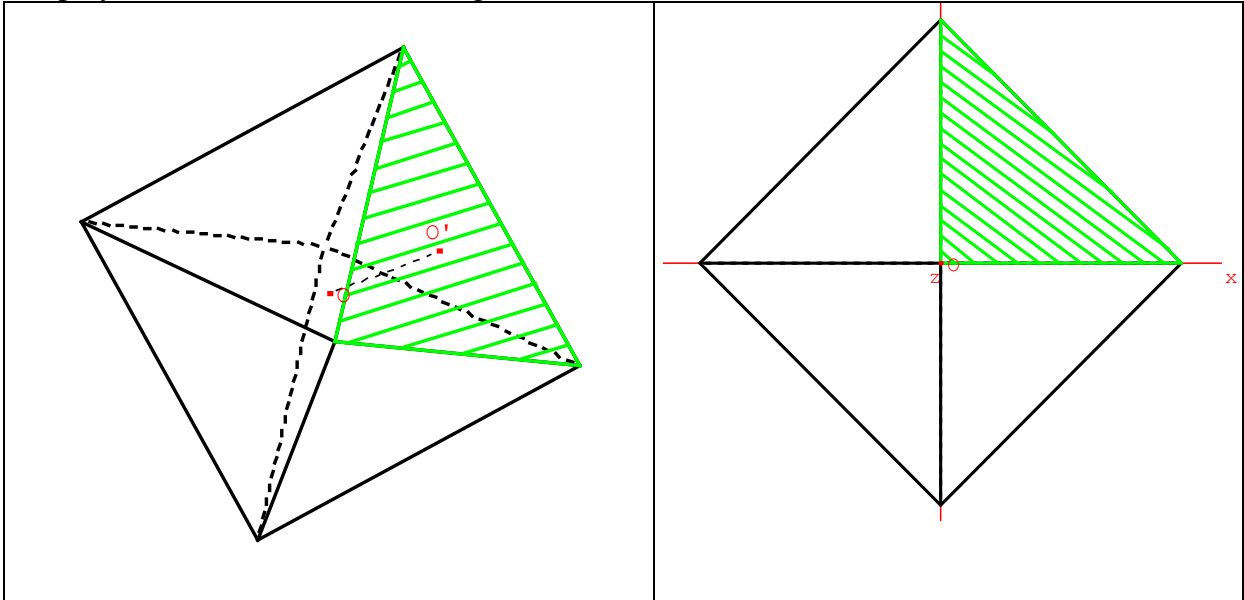
Le polyèdre est le **dodécaèdre rhomboïdal**.



4 - troisième cas : P_3 d'équation $x + y + z = 3$.

Les équations des images sont : $x + y + z = \pm 3, -x + y + z = \pm 3, x - y + z = \pm 3, x + y - z = \pm 3$, le polyèdre aura donc 8 faces (**FIG 13**). La face contenue dans le plan P_3 contient en son intérieur la projection de O de coordonnées $(1,1,1)$, la projection de cette face sur le plan xOy

contiendra donc le point (1,1). On calcule facilement que c'est le triangle de sommets (0,0), (0,3), (3,0) projection orthogonale du triangle équilatéral de sommets (0,0,3), (0,3,0), (3,0,0). Le polyèdre est donc un octaèdre régulier. (FIG 13) et (FIG 13 bis) ci-dessous



Bibliographie

- EUCLIDE - *Les éléments* (Livres I à V, X, XI, XIII) - traduction et commentaires par B.Vitrac - PUF 1990.
- *Les éléments d'Euclide*, livre XIII, Groupe d'histoire des mathématiques, IREM de Clermont-Ferrand, Juin 2001.
- A.M.LEGENDRE - *Eléments de géométrie* (12^{ème} édition) - Firmin Didot 1836.
- E. ROUCHE et C. DE COMBEROUSSE - *Eléments de géométrie* (7^{ème} édition) - Gauthier Villars 1904.
- J.HADAMARD - *Leçons de géométrie élémentaire* (7^{ème} édition) - Armand Colin 1932.
- M.BERGER - *Géométrie*, tome II, chap 12 - Nathan 1990.
- M.AUDIN - *Géométrie* - Belin 1998
- J.FRESNEL - *Méthodes modernes en géométrie* - Hermann 1996
- P.B YALE - *Geometry and symmetry* - Dover
- F.PECAUT - *Pavés et Bulles, éléments de cristallographie mathématique* - Publication de l'APMEP 1977.
- R.BKOUCHE - *De la géométrie et des transformations* - Revue REPERES IREM n° 4, juillet 1991.
- R.BKOUCHE - *Appendice historique dans Initiation à la géométrie* - D.Lehmann et R.Bkouché - PUF 1988.