DICHOTOMIE
OUTIL DE CALCUL ET
DE DEMONSTRATION
EN TERMINALE S

essai pédagogique

J.P DAUBELCOUR
I.R.E.M. de LILLE

LA DICHOTOMIE
OUTIL DE CALCUL ET DE DEMONSTRATION EN TERMINALE S

PRESENTATION

Depuis le début du XX° siècle, l'enseignement de l'Analyse au lycée a subi bien des évolutions, et des éclipses[1] et des retours. Depuis 1983 le corpus d'Analyse est devenu prépondérant en classe terminale scientifique; en même temps que s'affirmait une volonté d'ouverture des Lycées d'enseignement général au plus grand nombre.

Conjointement à cette ouverture du Lycée, on constate une lente érosion des contenus et la disparition progressive de la rationalité dans l'enseignement de cette discipline. Ces évolutions sont nettes à partir de 1991 en terminale comme je le précise ci-dessous.

a) L'état des lieux. En Terminale scientifique, le lycéen admet quasiment tous les théorèmes d'Analyse. Les énoncés des théorèmes sont précédés d'exemples d'introduction, et suivis d'exercices d'applications appelés "travaux pratiques". Le processus systématique qui passe directement de l'énoncé des théorèmes à leur utilisation dans un processus déductif, lors des " Travaux pratiques", est-il efficace pour l'acquisition d'un savoir ? Est-ce raisonnable d'appliquer systématiquement des propriétés ou des concepts dont très souvent l'élève n'a pas saisi le sens, la finalité ? Certains assurent qu'à l'occasion de ces T.P, il " Démontre" et "Déduit". Mais alors comment expliquer ses difficultés à raisonner, à suivre une démonstration, à en reconnaître la légitimité même, raisonner ,constatées en terminale et dans les cursus scientifiques post-bac ? Si on veut bien reconnaître qu'il y a là un problème, qu'il se pose bien avant la terminale, que les enseignants post-bac en signalent les effets néfastes; une réflexion s'impose. Certes les raisons en sont multiples, conjoncturelles, pour éclairer le sujet, faisons un bref retour en arrière.

- Dans les années 1970-80, les concepteurs affirme leur volonté d'une construction de type "Bourbakiste" au travers d'une généralisation excessive du vocabulaire de la théorie des ensembles associée à l'abus des structures algébriques. Ce bouleversement, de la maternelle à l'université, conduit à un enseignement des mathématiques trop formel pour les lycéens et coupé des utilisateurs des mathématiques. Je n'y reviens pas, le sujet a été très bien et très souvent traité. Un changement s'imposait, il se fit de façon restrictive et également excessive par réaction : la "contre-réforme" au début des années 80. Bien que ce soit au détriment de la géométrie et par la suppression radicale de toutes les structures, la prépondérance donnée à l'Analyse est accompagnée d'une grande cohérence, tenant compte des nouveaux outils, l'ordinateur ou la calculatrice programmable. Les arguments avancés par les concepteurs de ces nouveaux programmes (1983 pour la terminale scientifique) sont très pertinents.

Mais hélas, 10 ans plus tard on ne peut que constater un appauvrissement considérable des exigences : on peut dire, en caricaturant ,que le programme de 94 n'est que le squelette de celui de 83. Je veux d'abord retenir, dans le programme de juin 94, cette opposition à toute formalisation de l'Analyse, ce refus quasi systématique de toute "Démonstration" de théorème important, en Terminale scientifique. Ceci conduit à un passage, quasi direct, de l'activité préparatoire à l'application des propriétés admises. Ce constat soulève le bien fondé d'un tel enseignement : les élèves qui se destinent à une formation de mathématicien, de physicien ou plus généralement à un enseignement scientifique y sont-ils suffisamment préparés ? Argumentons avec l'esprit d'ouverture qui n'écarte pas la conviction.

- Beaucoup d'enseignants de Lycée ont compris très tôt, que la terminale C qui tenait ce rôle était condamnée à terme. En effet, après "le Collège unique", l'ouverture du "savoir" au plus grand nombre, objectif de toute véritable démocratie, s'est faite en grande partie par l'augmentation des effectifs des classes de seconde des Lycées d'enseignement

[1] Par exemple, le calcul intégral, apparu au Lycée vers le début du siècle, avec des promoteurs comme H. Lebesgue, a ensuite disparu dans les programmes 1947; pour revenir en 1962.

général. Cette évolution brutale à conduit la classe de TC a devenir, progressivement, par la force des choses, une classe refuge des "bons élèves", quelques soient par ailleurs leurs aptitudes en Mathématiques ou en Physique. Elle fut taxée d'élitisme, appelée "voie royale" et sa suppression en 1994 apparut alors comme une nécessité.
Pouvait-on l'éviter ? Etait-il possible d'accompagner cette démocratisation du Lycée d'une plus grande diversité des filières du baccalauréat plus adaptées aux talents et aux besoins de l'ensembles des lycéens ?
La restructuration des sections se réalise depuis le début des années 1990 dans le cadre de " la Rénovation des Lycées "; une grande réforme qui a mobilisé bien des législateurs successifs. Cette réforme a généré une série L, bien conçue et équilibrée, qui permet à un bon élève "littéraire" d'atteindre un excellent niveau de savoir, qu'il soit scolaire ou acquis dans son milieu d'origine. En sciences, sous le prétexte de retarder le plus possible l'orientation des élèves, la diversification des filières prend la forme perverse de l'uniformité. Depuis la suppression de la TC en 1994, l'élève de TS(terminale scientifique regroupant les anciennes TC et TD[1]), pour atteindre un niveau de compétence identique dans les trois grandes disciplines scientifiques: S.V.T., Physique-Chimie et Mathématiques**,** est condamné au " bachotage". Ajoutons à cela que sa compétence doit égaler pratiquement celle de son collègue de la série L dans la plupart des disciplines littéraires: Français en première; puis, en terminale, dissertation en Philosophie, dissertation en Histoire-Géographie (même programme que les TL mais avec une heure de cours en moins bien sûr), enfin Première Langue étrangère à l'écrit. Où trouvera-t-il, entre deux "devoirs surveillés "[2] , le temps de lire un article, de "réfléchir" tout simplement? Il est alors évident que l'enseignement de spécialité en mathématiques de 2 heures par semaines ne peut changer la donne initiale : l'acquisition d'un savoir mathématique est remplacée par un apprentissage ; qui plus est souvent réduit à des "recettes". Quant aux élèves de TSE série destiné aux futurs étudiants en sciences économiques, leur bagage mathématique se révèle insuffisant lors des études supérieures.
Cela dit, non seulement je suis très conscient que le problème de l'enseignement entre 16 et 18 ans, et au plus grand nombre, est difficile et dépasse de beaucoup l'hiatus que je viens de dénoncer entre les séries L et S. Il se pose dans la plupart des pays développés. Pour la charnière Terminale-Postbac, je renvoie à l'ouvrage de Pierre LEGRAND[3]: "*Le Bac chez nous et ailleurs*" où l'on trouvera des réponses plus globales sur cette grande question.

b) Le domaine des possibles. Si la raison d'un cours d'Analyse réduit pour l'essentiel à une démarche algébrique [4] est **"la difficulté des concepts rencontrés**", je suis bien conscient que c'est une "lapalissade" de le dire. Dans l'enseignement de l'analyse, est-il possible au Lycée, dans une terminale scientifique qui devrait s'adresser aux futurs étudiants des universités en sciences physiques, en mathématiques ou aux futurs ingénieurs de rétablir une certaine rationalité ? Si l'on désire conjuguer les développements algorithmiques et les démonstrations, il est nécessaire de disposer d'une "définition simple" mais opératoire des réels. Pour cela je choisis la limite commune de deux suites adjacentes qui est en accord avec le programme actuel(Juin94)[5]. L'expérience m'a montrée que l'élève accepte bien cette

---

[1] En terminale D l'enseignement s'adresse aux élèves désireux de se diriger vers les sciences expérimentales ; les mathématiques enseignées sont adaptées à cette orientation.

[2] Cette pratique se généralise, suite à la mise en compétition de nos établissements avec l'Enseignement Privé.

[3] P. Legrand fut doyen de l'Inspection Générale dans les années 80 et au début des années 90.

[4] Calcul des dérivées, des primitives par lecture inverse; calcul des termes consécutifs d'une suite récurrente ...

[5] En effet, le programme de spécialité admet que toute suite monotone et bornée converge; partant de là, il est aisé de démontrer que deux suites adjacentes ont même limite. Dans la suite de leurs études certains construirons les réels par les suites de Cauchy, ou les coupures dans Q; alors la propriété admise ici sera démontrée. C'est une démarche courante dans l'acquisition des savoirs sur la durée.

propriété, alors que la propriété de la borne supérieure ne passe pas, pour avoir essayé celle ci, il y a quelques années, lorsqu'on définissait l'intégrale de Riemann en TC.

c) Partant de là, j'essaie de montrer dans ce travail, déjà expérimenté partiellement ou totalement, selon les années, avec mes élèves (TC ou spécialité Math), que l'on peut démontrer certains résultats importants du cours d'Analyse élémentaire et non les admettre systématiquement. Je reste bien entendu fidèle à l'esprit et à la lettre des programmes actuels (Juin94).

α- Pour ce travail de démonstration, cela suppose un temps de la classe pendant lequel le maître explique, démontre au tableau, il tient la parole et la donne et la reprend, "il fait cours". Pour certains, ce temps est désormais inutile ou mineur; je ne suis pas d'accord. Il est vrai que l'enseignant est en recherche permanente d'un équilibre entre d'une part, l'action de communiquer un savoir, par les explications, les démonstrations qu'ils développent devant ses élèves, et d'autre part l'activité que génère chez l'élève l'acquisition de ce savoir et des savoir-faire qui en découlent. Ce travail est difficile, il n'y a pas de véritable recette, le" public" change physiquement chaque année, mais aussi évolue avec son époque. Avec chaque nouveauté technique, on a essayé de trouver "un système" pour enseigner: le rétroprojecteur, les cours à la télévision, la télévision dans la classe, la calculatrice, l'ordinateur; mais ces moyens sont apparus assez rapidement comme des aides, intéressantes certes, facilitant certaines tâches, parfois indispensables, mais le maître est toujours dans la classe. Lorsque l'élève s'exprime, et il doit le faire, se sentir libre de le faire pour soulever les questions, le maître reste son interlocuteur privilégié, car il détient le savoir[1], avec la responsabilité que cela incombe. Tomber dans l'excès de l'un de ces deux aspects de notre tâche a été, et sera toujours, à mon sens, préjudiciable à l'élève**.** L'activité nécessaire de l'élève**,** même sous contrôle d'un enseignant**,** ou l'aide d'une machine[2], ne saurait résumer à elle seule l'action d'enseigner.

β- Démontrer oui, mais démontrer quoi ? Il est bien certain qu'on ne peut traiter de l'Analyse définitive[3] dans le secondaire. Les concepts, souvent difficiles, doivent être dégagés progressivement ; en ménageant des étapes au-delà desquelles, l'élève, fut-il excellent, perdrait le sens. Ces erreurs ont été faites par le passé; par exemple avec les limites en $\varepsilon, \eta,$ ou l'intégrale de Riemann... et la borne supérieure. Cependant, en TS, (Spécialité-Math), je pense qu'il est temps d'amorcer certaines **« ruptures »** avec la pratique de l'enseignement de l'Analyse en terminale Scientifique**.** La difficulté des concepts exposés, de toute façon, demeurera longtemps encore sur de nombreux points; mais est-ce vraiment dramatique? Qui a saisi tout de suite, après leur construction en Bac+1, toute la richesses et la complexité des réels? Un autre grand problème: dans le cursus scolaire, une difficulté est de trouver le bon moment pour parler des limites et avec quel degré d'approfondissement? Mais en parler au Lycée sans pouvoir les utiliser dans le contexte d'une démonstration en TS, comme c'est le cas puisque nous ne disposons que de conditions suffisantes[4], c'est certes respecter une progression prudente, mais en créant des comportements qui vont perdurer dans l'après bac. On pourrait au Lycée donner une définition de la limite d'une suite ou d'une fonction en termes de valeurs approchées[5] à 10^{-n}. Les difficultés répercutées en D.E.U.G. par

---

[1] Mais les ouvrages scolaires? Il faut bien reconnaître que les élèves les lisent de moins en moins; ils sont plutôt une banque de données pour exercices et problèmes.

[2] Par exemple: un logiciel qui permet à l'élève de "s'autoformer; il en existe de plus en plus.

[3] L'analyse telle qu'elle est enseignée dans le Supérieur, dans les filières de Mathématiques pures.

[4] Il n'est pas certain, l'expérience le montre, qu'il soit plus facile pour l'élève de réaliser les majorations que nécessitent ces conditions suffisantes, que de résoudre des inéquations du type: $|f(x)-1| \leq 10^{-n}$ sur un intervalle centré.

[5] C'est l'objet actuel d'une autre étude du groupe Analyse à l'irem de Lille.

les pratiques actuelles en TS, font que, très souvent, l'étudiant continue d'admettre tout ou partie des théorèmes importants sur les limites; selon de nombreux enseignants du Supérieur, il ne construit pas toujours l'ensemble R, alors que le terrain "devrait" être préparé avec les suites étudiées au Lycée; parfois il n'en connaît pas les propriétés caractéristiques; les décimaux de sa calculatrice bornent son horizon pour encore longtemps.

Je crois qu'en T.S, certains résultats, admis actuellement, peuvent faire l'objet d'une démonstration; certains théorèmes, considérés jusqu'à présent comme évidents par l'interprétation graphique, et ils le sont très souvent, peuvent entrer dans un processus déductif. Bien entendu, un tel discours ne peut être tenu dans toute les séries terminales au Lycée, mais n'oublions pas que cette série S doit préparer certains de ses élèves aux disciplines scientifiques de haut niveau. Cette démarche peut être " volontariste": le " ça se voit sur le graphique " n'est plus déclaré suffisant pour tous les énoncés; mais il est préférable, lorsque c'est possible, et c'est parfois le cas, de justifier la nécessité d'une démonstration, dans cette période où l'élève admet beaucoup de propriétés. Enfin, encore faut-il que la motivation pour établir ces démonstrations, soit forte par l'importance des conséquences, et ces nouveaux résultats établis suffisamment riches en retombées pour la résolution des problèmes.

γ-La prudence et la modération demeurent la règle**;** le temps limité et la volonté de ne pas retomber dans l'excès de formaliste des années 70 sont des garde-fous suffisants. Il importe donc que ces **« ruptures »** avec l'intuition soient limitées en nombre et situées dans le contexte des « **objectifs généraux du programme** »; ces derniers étant appréciés unanimement me semble-t-il. Dans le travail qui suit ici, l'objectif est de démontrer quelques Théorèmes importants d'Analyse élémentaire en TS (Spécialité-Math). Le concept de limite de suite ou de fonction est supposé avoir été abordé au préalable. Pour les démonstrations, je m'appuie, pour l'essentiel, sur **les suites adjacentes**. Le thème est la **résolution des équations du troisième degré**. Enfin, le moyen est **la dichotomie.**

Résumons brièvement l'essai.

1) La recherche de conditions d'existence et d'unicité d'une solution d'une équation de degré trois me conduit à démontrer le théorème dit de « Bolzano ». Après le développement de son aspect calculatoire par dichotomie, sa démonstration, dans la foulée, est riche en procédés: raisonnement par récurrence; par disjonction des cas; enfin la propriété que deux suites adjacentes définissent un réel unique. Cette étude est facilitée par l'utilisation de la dérivée pour en déduire le sens de variation; ce résultat admis en 1°S, je le démontre dans la suite de cette même étude[1]. Il ne s'agit pas là d'un cercle, mais d'une démarche souvent utilisée dans le cadre de l'appropriation progressive de la connaissance par l'élève; rappelons qu'en DEUG, l'étudiant admet le théorème de d'Alembert, pour lui intuitif et signifiant, et il le démontre plus tard en Licence. C'est l'occasion, de se familiariser avec des organigrammes pour quelques routines sur les calculatrices programmables; en accord avec les nouvelles exigences du programme de Juin 94 sur cette question: justifier et utiliser tests et boucles. A ce sujet, l'élève de T.S. ne saurait être un "consommateur λ" de la calculatrice, il doit être à même de comprendre les logiciels les plus simples; ce qui permet de démystifier l'outil et d'en relativiser les possibilités.

2) Les conséquences de ce théorème sont nombreuses et accessibles: le théorème des valeurs intermédiaires bien sûr, mais surtout le cas des fonctions continues et strictement monotones au coeur de notre contrat en TS, avec, au passage, la définition des fonctions racines n-ièmes comme fonctions réciproques. Tout cela constitue une **séquence déductive** qui justifie la démarche de« **rupture** »

[1] Voir le Chapitre II de cette étude.

Bien entendu, il n'est pas question de démontrer que l'image d'un segment par une fonction continue est un segment; la propriété de la borne supérieure pose trop de difficulté à l'élève débutant en Analyse élémentaire. Bien que cette propriété soit équivalente, dans R, à la définition d'un réel par deux suites adjacentes, elle passe très mal auprès des élèves comme je l'ai dit plus haut.

3) Avec des outils nouveaux, je reviens, sous la forme d'un problème posé aux élèves, à la discussion de l'existence et du nombre de racines réelles de l'équation du troisième degré; mise, pour simplifier, sous la forme $x^3 + 3px + q = 0$.

Dans la pratique pédagogique, j'utilise souvent la démarche de Bruner[1]: stades manipulatoire (ici, calculatoire) iconographique et formalisation. L'usage des calculatrices programmables trouve naturellement sa place dans ce processus, pour permettre à l'élève d'avancer par lui même des "conjectures"; le calcul devient un argument important, au même titre que **le graphe,** pour justifier et parfois donner l'intuition de la démonstration**.** Je pense à des routines telles: dichotomie, suites récurrentes, valeurs d'une fonction. De plus, cette stratégie est en accord avec le triptyque en usage actuellement dès la classe de seconde:« Activité, cours, travaux pratiques ».

4) Enfin, l'approche d'une solution par dichotomie montrant sa « lenteur » relative, il importe de rechercher des suites convergeant « plus rapidement » vers la solution de l'équation. Je pense à la méthode du point fixe qui exige des connaissances complémentaires à celles acquises en 1°S, sur les dérivées. C'est l'occasion d'une nouvelle **séquence déductive** où je développe deux pistes possibles conduisant à une nouvelle rupture. On peut, en TS, admettre, ou démontrer simplement, le théorème de Rolle, puis démontrer l'inégalité des accroissements finis (c'était le cas il y a quelques années). Enfin, nouvelle rupture, démontrer le « principe de Lagrange » admis en 1°S. C'est l'ordre habituel.
Désirant explorer plus avant la dichotomie comme méthode de démonstration, je développe une autre piste; d'abord la démonstration du«Principe de Lagrange » d'où l'on déduit l'inégalité des accroissements finis. Rappelons que ce dernier résultat est un outil remarquable pour majorer « Majorer, minorer, encadrer... ».
Donc, le choix de cette « rupture » en TS, le développement de cette deuxième **séquence déductive**, me parait largement justifié, quel que soit la piste utilisée. La stratégie de Bruner que j'ai rappelée au 3), utilisée souvent dans cette étude, montre, je l'espère, qu'on peut équilibrer le discours du maître et l'activité de l'élève. Enfin, remarque importante: à condition de situer cette étude en TS (Spécialité-Math), à l'heure où j'écris, tous les prérequis sont conformes au programme de juin 1994. C'est l'unique raison de cette restriction à la spécialité; dans cette période qui apparaît de plus en plus "en attente d'une remise à plat de l'enseignement de l'Analyse[2]", aussi bien dans le secondaire qu'en Bac +1.

Pour conclure; essayons d'éviter l'exemple américain, où l'école publique a cédé, pour les études de qualité, tout le terrain au " collège " privé et payant.

J.P. Daubelcour. Animateur à l'I.R.E.M. de Lille.

Remarque1
Dans cette essai, je ne prends pas en compte_les modifications des programmes qui seront en application dès Septembre 98. Dans ce nouveau contexte, avec la disparition de la continuité et des suites monotones et bornées, l'Analyse en TS devient radicalement algébrique et le

[1] Pédagogue allemand qui s'est intéressé à l'enseignement de l'Analyse, entre autre.
[2] Ce n'est peut-être pas pour demain, mais cette reflexion aura lieu, à mon sens , à moyen terme ; car dans le contexe actuel le temps passé par l'élève en 1° et TS au travail de "l'analyse algébrisée" n'est plus justifié par rapport à la faiblesse des acquis.

travail qui suit n'y a plus sa place. Je pense qu'il s'agit d'une époque de transition, en attente d'une remise à plat des objectifs de l'enseignement au Lycée.

Remarque 2

Le lecteur peut faire remarquer, que par le passé, il n'a jamais été question de démontrer des théorèmes d'Analyse élémentaire. J'ai suivi une classe de Mathématiques élémentaires; l'Analyse, purement algébrique, se réduisait à l'étude des fonctions polynômes, rationnelles, et irrationnelles. Mais, à l'époque, l'important programme de géométrie permettait à l'élève de s'initier à l'hypothético-déductif (depuis la 4°), à l'analyse-synthèse, en fait, au raisonnement scientifique. Ce qui n'est plus le cas aujourd'hui, force est de le constater. Ceci dit, sans esprit passéiste, peut-on rendre plus présente, aujourd'hui, la rationalité dans la démarche des élèves, notamment en TS (Spécialité-Math)?

Remarque 3

J'ai été inspiré, pour le choix de la dichotomie, par l'article de **J.L. OVAERT** « Dichotomies et variantes » dans le bulletin Inter-IREM d'Analyse n°XX paru en 1981.

Remarque4

Les éléments de solution en annexe ont pour seul objet de permettre au lecteur d'évaluer rapidement le degré de difficulté.

Remarque 5

Je précise, , s'agissant d'un essai pédagogique, ce qui tient d'une activité, d'un cours ou de travaux pratiques. Pour une plus grande clarté, j'encadre tous les textes destinés à l'attention des élèves pour une mémorisation ou un travail personnel : énoncés, définitions, activités et travaux pratiques.

CHAPITRE I
LE THEOREME DE BOLZANO

I Problématique (ACTIVITE): Résoudre $x^3 + 2x - 1 = 0$

II Théorème de Bolzano.(COURS) Démonstration

Voir en Annexe 1 Eléments de solution des I et II

I PROBLEMATIQUE

Résoudre dans R l'équation: $x^3 + 2x - 1 = 0 (1)$

§1 Stade graphique

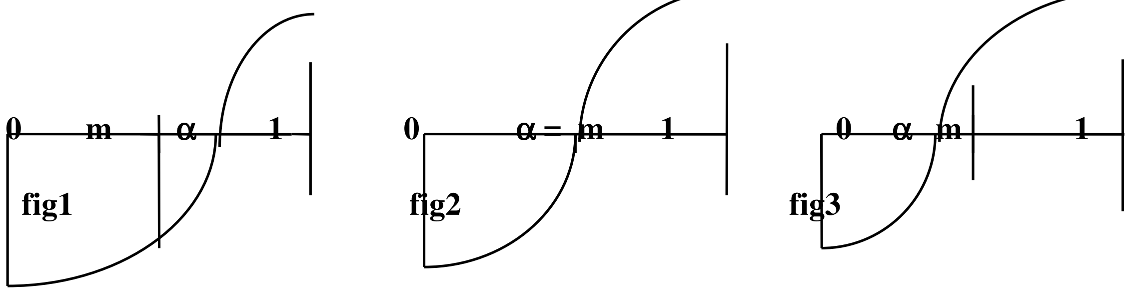
Soit la fonction f définie sur R par $f(x) = x^3 + 2x - 1$

1° question Démontrer que f est strictement croissante[1] sur R. Tracer sa courbe représentative Cf.

2° question Que peut-on conclure sur l'équation (1) ?

§2 Stade du calcul

Objectif: Calcul de valeurs approchées de α, la solution appartenant à [0,1], dont l'existence est acquise au I. On pose: a=0, b=1 et m = (a+b)/2 = 1/2. Trois cas sont possibles, illustrés par les figures ci- dessous. Dans le premier cas, (fig1), f(1/2)< 0. Dans le second cas, f(1/2) =0 (fig2). Enfin dans le dernier cas, f(1/2)> 0, (fig3)



Si f(1/2) < 0: $\frac{1}{2} < \alpha < 1$; posons $a_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}$; $b_1 = b = 1$; donc $a_1 \le \alpha \le b_1$

Si f(1/2) = 0: α = 1/2 est la solution conjecturée.

Si f(1/2) >0 : $0 < \alpha < \frac{1}{2}$; posons $a_1 = a = 0$ et $b_1 = \frac{a+b}{2}$; Donc $a_1 \le \alpha \le b_1$.

Ainsi α est situé dans un intervalle de longueur 1/2

Réitérons sur l'intervalle $[a_1, b_1]$.

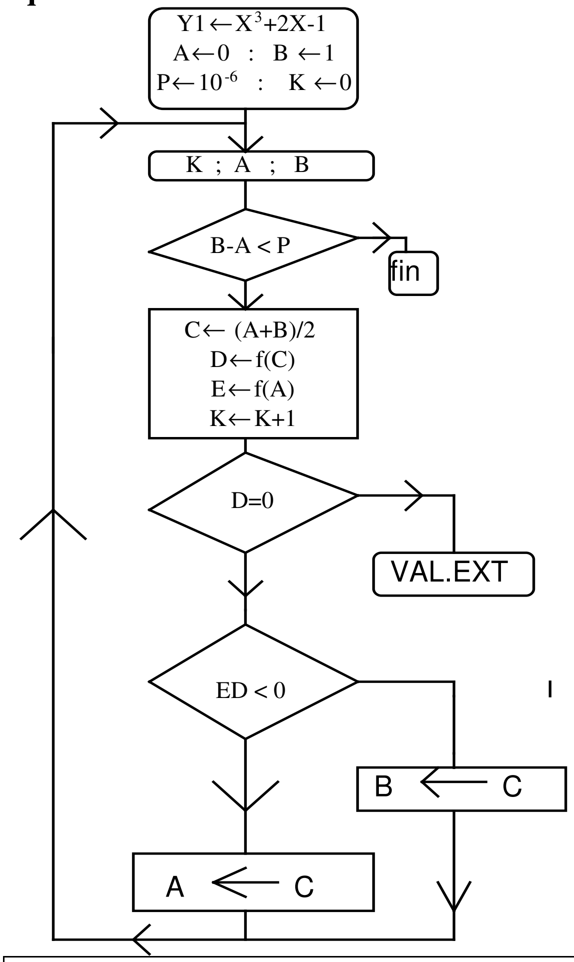
Si $f(a_1).f(\frac{a_1+b_1}{2}) < 0$ alors $0 < \alpha < \mathbf{\frac{1}{2}}$; posons $a_2 = a_1$ et $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$;donc $a_2 < \alpha < b_2$

Si $f(a_1).f(\frac{a_1+b_1}{2}) \ge 0$ alors $\frac{1}{2} < \alpha < 1$; posons $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ et $b_2 = b_1$; donc $a_2 \le \alpha \le b_2$.

Ainsi α est encadré dans un intervalle de longueur moitié 1/4, dont les bornes sont déterminées de façon unique. En réitérant ce raisonnement, on construit ainsi, termes après termes, deux suites (a_n) et (b_n) telles que : $a_0 \le a_1 \le \dots\dots\dots \le a_n \le \alpha \le b_n \le \dots\dots\dots \le b_1 \le b_0$ avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

[1] Comme annoncé dans la présentation, j'admets pour l'instant, comme en en 1°S, le principe de Lagrange.

Organigramme relatif au programme de la question 1



initialisons les données.
f va en Y1, 0 dans A, 1 dans B, et la précision dans P. Enfin 0 va dans K.

Afficher: K, A, et B

Si B-A<P, arrêt des calculs

Sinon faire les actions ci-contre.

Si D=0, C est valeur exacte de α.
Sinon, comparer ED à 0.Si ED < 0, alors C va dans B ; sinon C va dans A
puis dans les deux cas, on répète la séquence à partir de: afficher K, A et B.

1 ° question Suivre l'organigramme ci-joint, et réaliser sur votre calculatrice le programme permettant de calculer les premiers termes des suites (a_n) et (b_n) ; et ceci de $n = 0$ à $n = 20$.

2° question Que peut on déduire pour chacune des suites (a_n) et (b_n) ?

3° question Démontrer que le processus ne s'arrête pas: c'est à dire que $f(\frac{a_n + b_n}{2}) = 0$ est impossible. On raisonnera par l'absurde en montrant que α ne peut-être un nombre rationnel.

Conclusion de l'activité

a) **La courbe représentative montre très bien que l'équation (1) a une solution unique α.**

b) **Cette solution n'est pas un nombre rationnel.**

c) **Mais alors quelle est sa nature? Peut-on le définir, le caractériser avec plus de rigueur?**

Ces questions légitiment le stade formel, celui de la démonstration, qui en donnant un statut, certes non définitif, mais plus précis à ce nombre, donnera en même temps les raisons de la propriété que nous appellerons " Le théorème de Bolzano".

II DEMONSTRATION DU THEOREME DE BOLZANO

Formulation du problème.

Soit f, définie et continue sur [a,b], et f(a) et f(b) de signes contraires.
L'équation f(x) = 0 (i) admet-elle des solutions dans [a,b]?

A Dichotomie

Supposons f(a) > 0 et f(b) < 0; posons $m = f(\frac{a+b}{2})$.

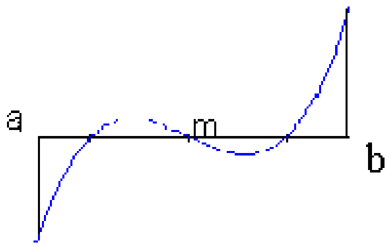


fig1 $m = 0$

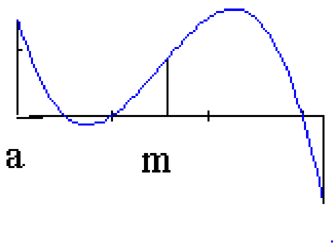


fig 2 $m > 0$

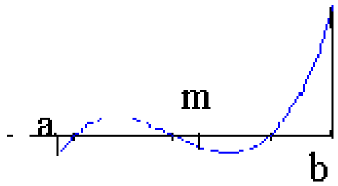


fig3 $m < 0$

- **Ou bien f(m) ≥ 0;** posons $a_1 = a$ et $b_1 = m$ voir fig1,2. Si f(m) = 0, b_1 est solution de l'équation (1); la recherche est terminée.
- **Ou bien f(m) < 0;** posons $a_1 = m$ et $b_1 = b$. (voir fig3)

Ainsi f est définie sur $[a_1, b_1]$ de longueur $\frac{b-a}{2}$; $f(a_1) < 0$ et $f(b_1) > 0$

et de plus $a \le a_1 \le b_1 \le b$. On dit que $[a_1, b_1]$est emboîté dans l'intervalle [a,b].

Puisque $f(a_1)$ et $f(b_1)$ sont de signes contraires, on peut refaire le même raisonnement sur $[a_1, b_1]$:

- **Ou bien** $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0$, alors $\frac{a_1+b_1}{2}$ est solution de (1).
- **Ou bien** $f(\frac{a_1+b_1}{2}) \neq 0$**,** alors on détermine un intervalle

$[a_2, b_2]$ tel que $f(a_2) < 0$, $f(b_2) > 0$

De plus $a \le a_1 \le a_2 \le b_2 \le b_1 \le b$ et $b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}$

B Récurrence

Soit un entier n fixé, supposons que nous ayons déterminé par la méthode ci-dessus, pour tout entier $k \in \{1,2,\ldots\ldots;n\}$ un intervalle $[a_k, b_k]$ tel que:

$$\begin{cases} a = a_0 \le a_1 \le \ldots\ldots\ldots \le a_k \le b_k \le \ldots\ldots\ldots b_1 \le b_0 & (1) \\ b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k} & (2) \\ f(a_k) < 0 \text{ et } f(b_k) > 0 & (3) \end{cases}$$

Considérons $f(a_n) f(\frac{a_n + b_n}{2})$, deux cas sont possibles:

- $f(a_n).f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq 0$; posons $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.

- $f(a_n).f(\frac{a_n+b_n}{2}) < 0$; posons $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$

Alors les propriétés (1) (2) et (3) ci-dessus sont encore vraies au rang n+1.

Lorsqu'il existe un entier n_0 tel que $f(\frac{a_{n_0}+b_{n_0}}{2}) = 0$, alors la solution α est un nombre décimal, puisque qu'en général a et b le sont.

Sinon, nous avons construit deux suites (a_n) et (b_n) telles que:

$$\begin{cases} \text{La suite } (a_n) \text{ est croissante et majoree par } b_0 \\ \text{La suite } (b_n) \text{ est decroissante et minoree par } a_0 \\ \forall\ p \in N^*\ a \leq a_p \leq b_p \leq b \ ;\ b_p - a_p = \frac{b-a}{2^p} \text{ donc } \lim\limits_{p\to\infty} \frac{1}{2^p} = 0 \text{ et } \lim\limits_{p\to\infty}(b_p - a_p) = 0 \end{cases}$$

Les suites (a_n) et (b_n) *sont adjacentes. Leur limite commune l vérifie*

$l = \lim(a_n) = \lim(b_n)$ *; telle que :* $\forall\ p \in N^*\quad a_p \leq l \leq b_p$ *; donc* $l \in [a_p, b_p]$

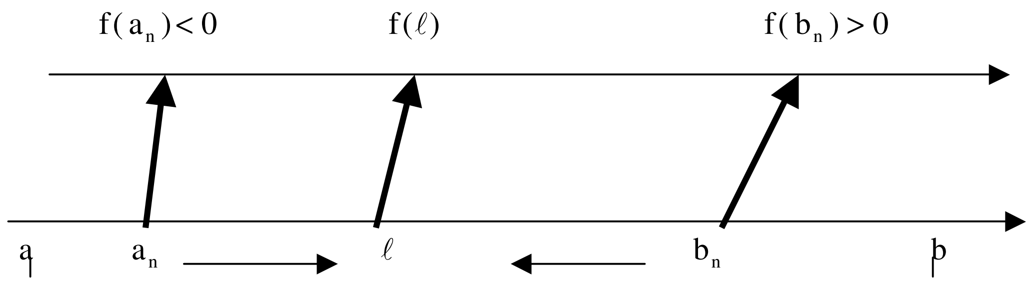
Supposons alors f continue sur [a,b]; donc en particulier en l.

Par composition des limites[1] *:* $\lim(f(a_p)) = \lim(f(b_p)) = f(l)$

$\forall\ p \in N^*\quad f(a_p) < 0$ *alors* $\lim(f(a_p)) \leq 0$ *donc* $f(l) \leq 0$

et $\forall p \in N^*\quad f(b_p) > 0$ *alors* $\lim(f(b_p)) \geq 0$ *donc* $f(l) \geq 0$

Donc ***nécessairement*** *f(l)=0 et l est une solution de (i). Posons* $l = \alpha$.



Quelles sont **les raisons** de cette propriété ? La démonstration nous les a montrées.

a) Deux suites adjacentes ont même limite. Proposition admise en T.S qui donnent un statut précis aux nombres qui sont des limites de suites obtenues de cette façon.

b) La continuité de f sur [a,b], en particulier en *l*.

Ces propriétés tiennent, d'une part au statut que l'on a adopté pour les nombres réels; d'autre part aux propriétés des fonctions, ici la continuité.

.Théorème 1 (de BOLZANO) Soit f continue sur [a,b] ; si f(a) et f(b) sont de signes contraires, alors l'équation f(x)=0 admet au moins une solution α appartenant à l'intervalle [a,b]. (le réel α est défini comme la limite commune de deux suites adjacentes construites par dichotomie).

Applications

Dans les exercices suivants, il importe de bien mettre en évidence les hypothèses du théorème de Bolzano

[1] Résultat admis en T.S

Exercice 1: a) Soit l'équation $x^3 + x + 1 = 0$ (i) sur R, démontrer que l'équation (i) admet une solution et une seule $\alpha \in$ [-1,0]. Construire, par dichotomie, deux suites adjacentes de nombres décimaux approchant α.
Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $a_{n_0} \le \alpha \le b_{n_0}$ et $b_{n_0} - a_{n_0} \le 10^{-6}$.
Calculer a_{n_0} et b_{n_0}. b) Mêmes questions pour l'équation $x^3 + 3x + 1 = 0$ sur R.

Exercice 2: a) Soit l'équation: $x \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$ $\tan x - x = 0$(i)

Démontrer que l'équation (i) admet une solution et une seule $\alpha \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$. Construire, par dichotomie, deux suites de nombres décimaux approchant α.
Déterminer le plus petit entier
n_0 tel que $a_{n_0} \le \alpha \le b_{n_0}$ et $b_{n_0} - a_{n_0} \le 10^{-6}$. Calculer a_{n_0} et b_{n_0}
b) Mêmes questions pour : $e^{5x} - x - 100 = 0$.

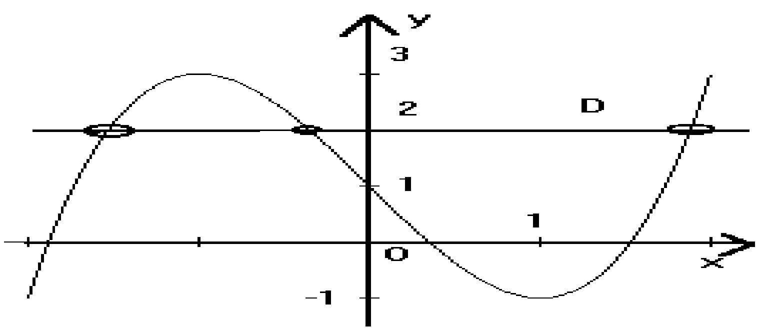
CHAPITRE 2

LE THEOREME DES VALEURS INTERMEDIAIRES

I Evidences graphiques et approximation des solutions
II Démonstration du théorème des valeurs intermédiaires
III Cas des fonctions continues et strictement monotones
IV Application 1 : Comment isoler les zéros d'une équation
V Application 2 : Fonctions racine n-ièmes

I Evidences graphiques et approximation des solutions

Soit l'équation : $x \in [-3,3]$ $x^3 - 3x + 1 = 2$ (1)
on définit sur $[-3,+3]$ g par $g(x) = x^3 - 3x + 1$
GRAPHIQUEMENT: Soit C_g la courbe représentative de g ; on peut la tracer suffisamment proprement pour isoler les solutions de l'équation (1).



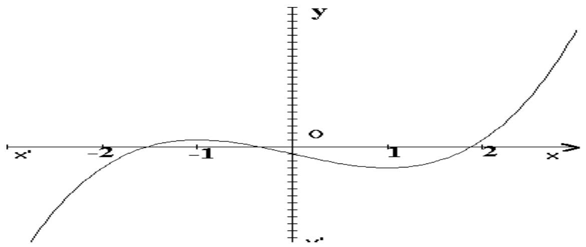
Les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$, le résultat, intuitif selon lequel une équation polynôme de degré trois ne saurait avoir plus de trois solutions réelles[1] ; tout ceci nous permet de conclure qu'il n'y aura pas d'autre solution à l'équation (1) que celles observées à partir du graphe.

On constate que Cg coupe la droite (D) en trois points ; il est donc légitime de conclure que l'équation (1) admet 3 solutions distinctes α, β et γ. L'existence de ces solutions pour une équation de degré 3 tenant à l'observation de la courbe représentative; il reste à en réaliser un calcul approché pour chacune d'elles ; et par dichotomie, seule méthode à notre disposition pour l'instant. Soit donc l'équation: $x \in [-3,3]$ $g(x) = 2$ (2).Géométriquement, il est clair qu'en appliquant au

1

graphe ci-dessus la translation de vecteur $-2\vec{j}$, on est ramenée à une fonction vérifiant, sur des intervalles à déterminer, les hypothèses du théorème de Bolzano. Ainsi, l'équation (2) équivaut sur [-3,3] à : $x^3 - 3x - 1 = 0$ (3)

Soit la fonction h définie sur I = [-3,3] par $h(x) = x^3 - 3x - 1$.



Le graphe de h ci-contre permet de localiser les trois solutions :
$\alpha \in [-2,-1]$, $\beta \in [-1,0]$ et $\gamma \in [1,2]$.
Qui plus est, les hypothèses du théorème de Bolzano sont réalisées sur chacun des trois intervalles ci-dessus pour la fonction h.
L'utilisation du programme mis au point au chapitre I donne :
$-1,532089 < \alpha < -1,532088$
$-0,347296 < \beta < -0.347295$
$1.879384 < \gamma < 1.879385$

la précision ayant été fixée à 10^{-6}.

REMARQUE Pour démontrer que la propriété ci-dessus est généralisable, l' étude graphique et géométrique nous incline à appliquer le théorème de Bolzano à la fonction : $x \to f(x) - k$.

II Théorème des valeurs intermédiaires

<u>théorème 2</u> **Si** f est une fonction continue sur [a,b], **ALORS** pour tout réel k de l'intervalle [f(a) ,f(b)], il existe au moins un réel c de l'intervalle [a,b] tel que f(c) = k

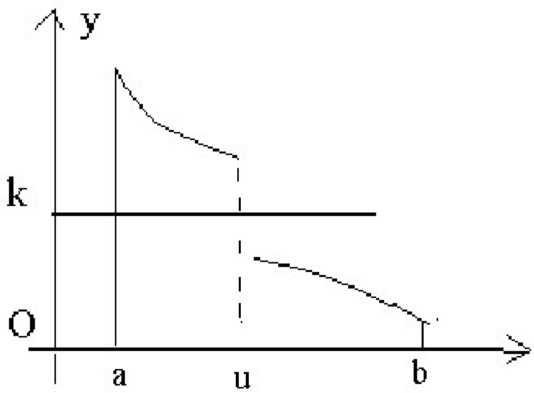


fig1 (f non continue en u)

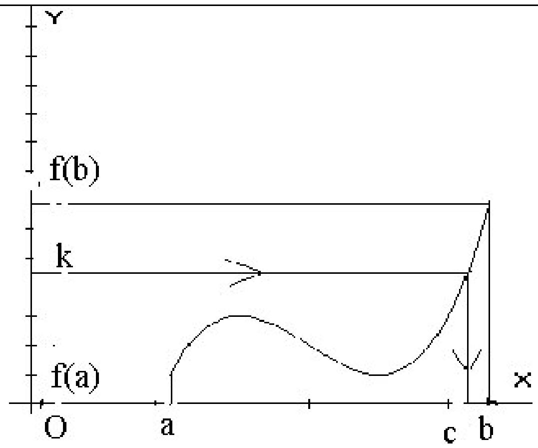


fig2

<u>**Preuve**</u> Si k = f(a) ou f(b) , alors c = a ou b. Si $k \neq f(a)$ et $k \neq f(b)$, supposons f(a) < f(b) (si f est constante sur [a,b] ,la preuve est évidente) et donc $k \in]f(a), f(b)[$. Posons g la fonction définie par : $x \in [a, b]$; $g(x) = f(a) - k$.

La **fonction g est continue sur [a,b]** ;de plus , g(a) =f(a) -k :**g(a) < 0** ; g(b) = f(b) - k :**g(b) > 0**

Les hypothèses du théorème de Bolzano sont réalisées pour g : il existe donc au moins un réel c de [a,b] tel que g(c) = 0. De plus: $c \in]a, b[$ car $f(a) \neq k$ et $f(b) \neq k$.Ainsi f(c) = k.

Interprétation : tout réel compris entre f(a) et f(b) est une valeur prise par f ; d'où le nom donné à ce théorème. Sur la fig1, f n'est pas continue en u, donc sur [a,b], et le réel k n'est pas toujours une valeur prise par f.

APPLICATION

Exemple Discutons, selon les valeurs du réel k , le nombre de solutions de l'équation $x^3 - 3x + 1 = k$ (1). Mais cette fois nous disposons du théorème 2.
La fonction g définie sur I = [-3,3] par: $g(x) = x^3-3x+1$ est continue sur I ; g(-3) = -17 , g(3) = 19. Donc pour tout réel k de [-17,19] ,l'équation (1) admet au moins une solution. Revenons à l'équation :

$$x^3 - 3x + 1 = 2 \text{ (1)}.$$

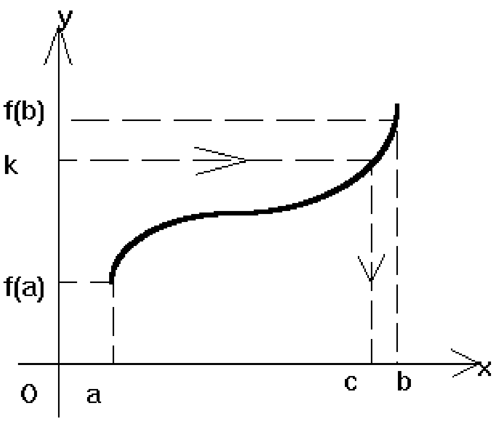
Sur chacun des intervalles [-3,-1] , [-1,1] et [1,3] , g est strictement monotone.
Soit g_1 la restriction de g à l'intervalle [-3,-1] ; elle est continue et strictement croissante ; supposons qu'il existe deux antécédents α et β du réel 2 par g_1 dans l'intervalle [3,-1].; ce qui contredit $g_1(\alpha) = g_1(\beta) = 2$. Ainsi α est l'unique antécédent de 2 par g_1. On procède de même sur les autres intervalles [-1,1] et [1,3]. En conclusion , l'équation du § I admet trois solutions réelles distinctes : $\alpha, \beta, \text{et } \gamma$ telles: $-3 < \alpha < -1 < \beta < 1 < \gamma < 3$
Remarquons que pour isoler chacune des solutions, nous considérons des intervalles sur lesquels la fonction est strictement monotone; il est tant de statuer dans le cas général.

III Cas de fonctions continues et strictement monotones

- Si f est continue et croissante sur I = [a,b] (a<b) ;

$$\forall x \in [a, b] \quad ; \quad f(a) \le f(x) \le f(b)$$

Ainsi f(a) et f(b) sont respectivement le minimum et le maximum de f sur [a,b].
- Si de plus f et strictement croissante sur [a,b] ; pour tout réel k de [f(a),f(b)] , considérons l'équation : f(x) = k



Elle admet au moins une solution d'après le thm2
Supposons qu'il y ait deux solutions distinctes c et d; reprenons le raisonnement ci-dessus: avec c < d alors f(c) < f(d) . Ceci contredit l'assertion "f(c) = f(d) = k " ; donc c est unique. On dit que f réalise une bijection de [a,b] sur [f(a),f(b)]

Théorème3 Si **f est continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur [a,b],** ALORS **f est une bijection de [a,b] sur [f(a),f(b)] . (resp. sur [f(b),f(a)]).**

Corollaire **Si** f est continue et strictement monotone sur [a,b] et de plus f(a)f(b) < 0 **ALORS** l'équation: f(x) = 0 admet une solution unique $\alpha \in [a, b]$.

III BIS Théorèmes admis sur les fonctions continues

Notre connaissance des nombres réels est très largement incomplète[1] en TS, c'est pourquoi nous admettrons les théorèmes suivants qui demeurent signifiants pour l'élève:

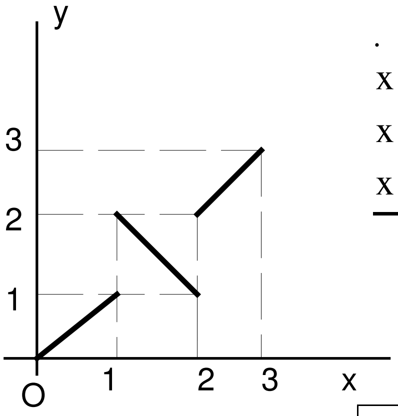
[1] Le fait d'avoir admis la convergence des suites monotones et bornées nous a permis de dire que deux suites adjacentes définissaient un réel et un seul. Pour importante et utile que soit cette propriété, elle n'est qu' un premier pas dans la connaissance des nombres réels.

Théorème 4 **Si** f est continue sur un segment [a,b] de R , **ALORS** l'image de [a,b] est un segment [m,M] de R.

m et M sont respectivement le minimum et le maximum de f sur [a,b]; et ces bornes sont effectivement atteintes. En d'autres termes : " $\forall k \in [m, M] \quad \exists c \in [a, b]$ tel que : $f(c) = k$"

exemple : Soit f : x→ sinx, définie sur [0,π] ; l'image de cet intervalle est le segment [-1,1].

attention : La réciproque du théorème4 est fausse. Voyons un contre-exemple sur la figure ci-dessous: Ici f n'est pas continue sur [0,3], cependant c'est une bijection de cet intervalle sur lui même



$x \in [0,1[\quad f(x) = x$

$x \in [1,2[\quad f(x) = -x - 3$

$x \in [2,3] \quad f(x) = x$

Théorème 5. **Si** f est continue sur un intervalle I de R (fermé ou non),**ALORS** l'image de I par f est un intervalle de R (fermé ou non).

Corollaire. **Si** f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I de R **ALORS** f est une bijection de I sur f(I).

La démonstration du corollaire est aisée. Supposons que le réel k de l'intervalle f(I) soit l'image par f de deux réels distincts; ceci contredit la stricte monotonie de f .

Exemples de situations où s'applique le Corollaire ci-dessus : f est supposée continue et strictement croissante sur I.

$I =]a, b]$; $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$: f est une bijection de I sur $]\ell, f(b)]$

- $I =]-\infty, b]$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$: f est une bijection de I sur $]\ell, f(b)]$
- $I =]-\infty, +\infty[$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell'$: f est une bijection de I sur $]\ell, \ell'[$

exercice1 Soit f définie sur I= [0,6] par $f(x) = |x^2 - 4x|$;déterminer l'intervalle image par f de I. Discuter , selon les valeurs du réels k le nombre de solution de l'équation : f(x) = k.

exercice2 Soit f définie sur R par $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$; démontrer que f est une bijection de R sur un intervalle que l'on déterminera.

IV Application 1 : Comment isoler les zéros d'une fonction

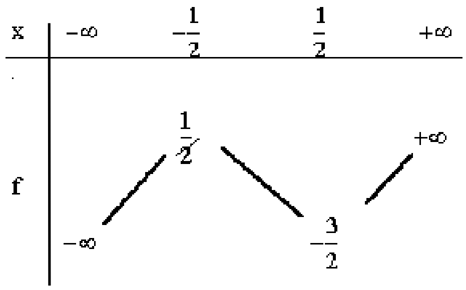
Exemple._ Soit l'équation : $x \in R, 4x^3 - 3x - \dfrac{1}{2} = 0$ (E)

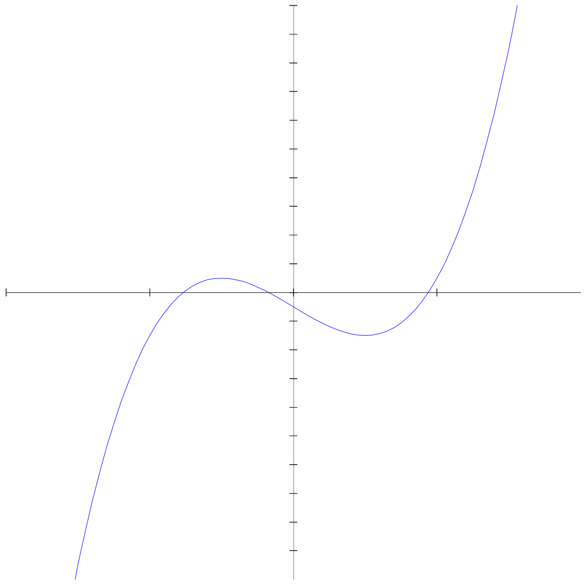
1°question Etudier de façon sommaire le sens de variation de la fonction f : x → $4x^3 - 3x - \dfrac{1}{2}$, définie sur R.

2°question Démontrer que l'équation (E) admet trois solutions réelles α, β et γ , appartenant à trois intervalles de longueur 0,5.

3°question Calculer , par dichotomie , un encadrement de chacune des solutions à la précision 10^{-6}. **Eléments de solution**

1°question





2°question a) la restriction f_1 de f à $I = \left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ est continue et strictement croissante ,d'après le corollaire du th5 ci-dessus ,c'est une bijection de I sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$. 0 appartient à l' intervalle image ,donc admet un unique antécédent α par f , de plus $f(-1)f(-\frac{1}{2})<0$; donc $\alpha \in \left]-1,-\frac{1}{2}\right[$. b) , c) On procède de même sur les intervalles $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$.

3°question Avec le programme réalisé au chapitre 1 § II , on trouve les encadrements:

$$-0{,}766045 \le \alpha \le -0{,}766044$$

$$-0{,}173649 \le \beta \le -0{,}173648$$

$$0{,}939692 \le \gamma \le 0{,}939693$$

EXERCICES Mêmes questions pour les équations suivantes:
Isoler et calculer un encadrement de longueur 10^{-6} des solutions éventuelles des équations suivantes:

$$x \in R ;\quad x^3 - 3x - 1 = 0$$

$$x \in R ;\quad x^3 - 6x^2 - 15x + 15 = 0$$

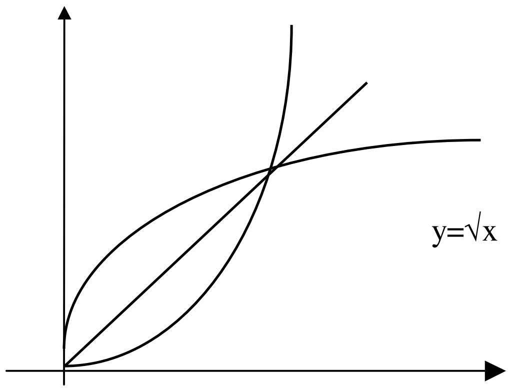
V Fonctions racine n-ièmes

§1 Fonction racine carrée

$$f\begin{cases} R^+ \to R \\ x \to x^2 \end{cases} \text{ est } \underline{\text{continue et strictement croissante}}$$

$$\text{sur } [0,+\infty[,\ f(0)=0\ ,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

D'après le corollaire du th5, <u>f est une bijection</u> de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$. Elle admet une bijection réciproque, notée $f^{-1,}$ qui est aussi continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, ces deux propriétés pour f^{-1} étant admises.



$$\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in [0,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(y) \\ y \in [0,+\infty[\end{cases}$$

On note $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ donc

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ x \in [0,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ x \in [0,+\infty[\end{cases}$$

<u>Propriété</u> $C_{f^{-1}}$ et C_f sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère.[1]

Exercice Calculer un encadrement de $\sqrt{2}$ de longueur 10^{-6} par dichotomie:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Utilisons le programme dichotomie du chapitre 1 § II en initialisant ainsi :

$Y_1 = X^2 - 2$, $A = 1$, $B = 2$; $P = 10^{-6}$ $Y_1 = X^2 - 2$, $A = 1$, $B = 2$; $P = 10^{-6}$

$a_{20} = 1{,}414213181$ $b_{20} = 1{,}414214134$ $a_{20} = 1{,}414213181$ $b_{20} = 1{,}414214134$

Donc 20 dichotomies sont nécessaires pour approcher $\sqrt{2}$ à moins de 10^{-6}. Le problème se pose d'étudier des méthodes d'approche plus rapides que celle-ci.

§2 Fonction racine cubique

$f\begin{cases} R^+ \to R \\ x \to x^3 \end{cases}$ est continue et strictement croissante sur$[0,+\infty[$, $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

D'après le corollaire c'est une bijection, elle admet donc une bijection réciproque notée f^{-1}, nous admettrons qu'elle est aussi continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

On note: $\begin{cases} y = \sqrt[3]{x} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^3 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt[3]{125} = 5$, on note aussi: $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

Exercice Calculer un encadrement de $\sqrt[3]{2}$ de longueur 10^{-6} par dichotomie:

$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{2} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$a_{20} = 1{,}259920120$ $b_{20} = 1{,}259921074$

§3 fonction racine n-ième

$f\begin{cases} R^+ \to R^+ \\ x \to x^n \end{cases}$ n entier ≥ 2 est continue et strictemement croissante sur R^+.

$f(0) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Donc, f admet une bijection réciproque également continue et strictement croissante sur R^+.

On note: $\begin{cases} y = \sqrt[n]{x} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^n \\ y \geq 0 \end{cases}$

---

[1] La réflexion d'axe D(y = x) transforme M(x,y) en M'(y,x).

Exercice Déterminer un encadrement de $\sqrt[5]{2}$ par dichotomie de longueur 10^{-6}
On trouve $a_{20} = 1{,}148697$ et $b_{20} = 1{,}148698$.

CHAPITRE 3

DISCUSSION DE L'EQUATION $X^3 + 3pX + q = 0$

I Forme réduite de l'équation du troisième degré

II Nombre de solutions de $x^3 + 3px + q = 0$ $(q < 0)$

III Cas de trois solutions distinctes.

Voir en Annexe 2 des éléments de solution des problèmes.

Disposant désormais des théorèmes sur les fonctions continues sur un intervalle[1], il est possible de statuer sur l'existence et le nombre de solutions réelles dans le cas général:

$$aX^3 + bX^2 + cX + d = 0 \quad (a \neq 0)$$

On peut le faire sous la forme d'un problème proposé aux élèves dans la rubrique: travaux pratiques.

TRAVAUX PRATIQUES

I Formes réduites de l'équation du troisième degré:

Soit P un polynôme de degré 3, à coefficients réels tel que: $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$

1°question a) On pose X= x+h. Montrer que l'on peut trouver une valeur de h pour laquelle P(X) s'écrive: a.Q(x) , où Q est un polynôme de la forme suivante :
$Q(x) = x^3 + 3px + q$; $p \in R$; $q \in R$. Montrer que P et Q ont le même nombre de racines réelles. On dira que Q est la forme réduite de P.

b) Déterminer la forme réduite des polynômes suivants:

$$P(X) = X^3 - 6X^2 + 15X - 15$$

$$P(X) = X^3 - 5X^2 + 2X + 1$$

2°question a) Dans la suite, on désignera par (E) l'équation réduite : $x^3 + 3px + q = 0$
Résoudre (E) dans le cas p=0, ou q=0.

b) On suppose désormais p≠0. Démontrer que :

$$x^3 + 3px + q = 0 \alpha \text{ solution de (E)} \quad \Leftrightarrow \quad -\alpha \text{ solution de } x^3 + 3px - q = 0$$

On supposera désormais dans la suite du problème que $q < 0$.

II Nombre de solutions de l'équation $x^3 + 3px + q = 0$ $(q < 0)$

1°question a) Soit f définie sur R par $f(x) = x^3 + 3px + q$, $p > 0$, et $q < 0$.
Etudier les variations de f, en déduire que l'équation (E), dans ce cas, admet une solution unique.

b) Démontrer que l'équation: $x^3 + 3x - 1 = 0$ admet une solution unique que l'on isolera dans un intervalle d'amplitude 1.

2°question Soit l'équation (E) : $x^3 + 3px + q = 0$ avec $q < 0$. On suppose désormais $p < 0$.

a) Etudier les variations de f. On pose M=$f(-\sqrt{-p})$ et $m = f(\sqrt{-p})$.

b) Démontrer que M a le signe du réel $-(4p^3 + q^2)$

c) Démontrer les propositions suivantes:

$4p^3 + q^2 > 0 \quad \Leftrightarrow$ (E) admet une solution unique

$4p^3 + q^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$ (E) admet deux solutions dont $-\sqrt{-p}$

$4p^3 + q^2 < 0 \quad \Leftrightarrow$ (E) admet trois solutions distinctes

[1] De plus, nous utilisons le principe de Lagrange admis en 1°S; lequel principe est démontré au chapitre 4 de cet essai. Il serait peut-être plus naturel de placer l'étude qui suit après ce chap.4; par soucis d'enchaînement avec les Théorèmes démontrés au chap.3, je le place ici.

d) En déduire le nombre de solutions des équations suivantes: $x^3 - 3x - 1 = 0$; $x^3 - 3x - 2 = 0$; $x^3 - 3x + 5 = 0$

En résumé: si l'on pose $\Delta = 4p^3 + q^2$. La discussion du nombre de solutions de l'équation réduite $x^3 + 3px + q = 0$ avec $q < 0$ s'ecrit :

p

- $p > 0$ solution unique
- $p < 0$
  - $\Delta > 0$ une solution unique
  - $\Delta = 0$ deux solutions dont $-\sqrt{-p}$
  - $\Delta < 0$ trois solutions distinctes

III Cas de trois solutions distinctes

1°question **E**tude d'un exemple. Soit l'équation dans R : $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$ (1)

a) Démontrer que (1) admet trois solutions réelles distinctes appartenant à [-1,1]. Donner un encadrement de longueur ½ pour chacune d'elles.

b)Démontrer la formule $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ on posera $x = \cos\theta$ dans l'équation (1). En déduire les valeurs exactes des trois solutions réelles (à l'aide de la fonction cosinus); donner des valeurs approchées de chacune d'elles à 10^{-8} près.

2°question Soit l'équation réduite $x^3 + 3px + q = 0$; $p < 0$; $q < 0$; et $4q^3 + q^2 \leq 0$

Nous savons qu'elle admet trois solutions réelles distinctes (II).

a)Démontrer que les solutions appartiennent à l'intervalle $I = [-2\sqrt{-p}, 2\sqrt{-p}]$. Resoudre (E) si $\Delta = 0$.

b) On suppose alors $\Delta < 0$, montrer qu'il existe deux réels θ et ψ tels que : $\forall x \in I$, $x = 2\sqrt{-p}\cos\theta$ et $\cos\psi = \frac{q}{2p\sqrt{-p}}$; $\psi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

c) Exprimer cos3θ en fonction de cosθ et en déduire en fonction de ψ les racines de l'équation (E).

3°question Application : résoudre dans R $x^3 - 3x - 1 = 0$; on donnera les valeurs exactes des solutions.

Remarque Cette méthode a l'intérêt de conduire à des valeurs exactes des solutions lorsque $\cos\psi$ donne un angle remarquable $,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}$. Sinon , la fonction Arccos, sur la calculatrice, donne des valeurs approchées de ψ et par suite des trois solutions.

CHAPITRE 4

COMPLEMENTS SUR LES DERIVEES EN TS

Voir en Annexe 3 des éléments de solution de l'activité initiale.

PREAMBULE

L'approche d'une solution d'une équation du troisième degré, par dichotomie, conduit à la recherche de suites convergeant plus rapidement. C'est le cas de la méthode du point fixe, ou des tangentes (Newton) qui nécessitent des savoirs complémentaires sur les dérivées en TS.

- dérivées et sens de variation ; bien qu'admis en 1°S, nous le démontrons ici comme je l'annonce dans la présentation, avec le soucis de ne pas faire de cercle.
- inégalité des accroissements finis.

L'objectif reste le même : comme au chapitre précédent, dans le triptyque habituel: activité préparatoire, formalisation (cours), et travaux pratiques, est-il possible de proposer aux élèves de TS (Spécialité-Math) des démarches qui conduisent à démontrer, par des moyens simples, quelques uns des théorèmes importants de l'Analyse élémentaire. Je distingue pour cela deux pistes.

La première reprend la méthode par dichotomie pour démontrer le Principe de Lagrange, avec pour prérequis les suites adjacentes comme au chapitres précédents.
Ce développement renforce encore l'importance théorique de la dichotomie en Analyse, et conduit rapidement à l'inégalité des accroissements finis. L'unité des quatre chapitres est ainsi réalisée.

La seconde piste, plus traditionnelle, déjà expérimentée par le passé en terminale, consiste à admettre le théorème de Rolle (ou le démontrer simplement) et à démontrer le théorème des accroissements finis et l'inégalité du même nom. On déduit enfin de ceci le Principe de Lagrange. Le réalisme et la simplicité sont les atouts de cette deuxième piste.

FORMULATION DU PROBLEME A PARTIR D'EXEMPLES (ACTIVITE PREPARATOIRE)

Exemple 1

Soit l'équation: $x \in [2,3] \quad x^3 - 6x - 6 = 0 \quad (1)$

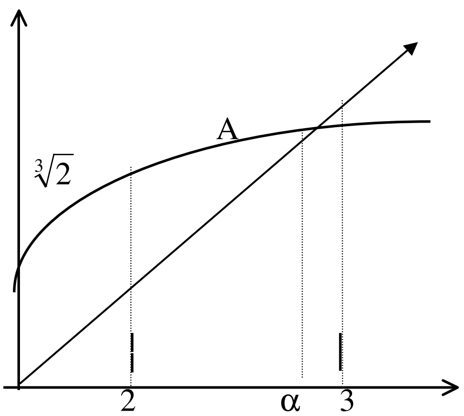
1°question Démontrer que l'équation (1) admet une solution et une seule $\alpha \in [2,3]$.
Déterminer, par dichotomie, un encadrement de α de longueur 10^{-6}.
Combien de dichotomies sont-elles nécessaires ? (Voir programme chapitre 1, §II)

2°question a) Démontrer que l'équation (1) équivaut sur [2,3] à l'équation:

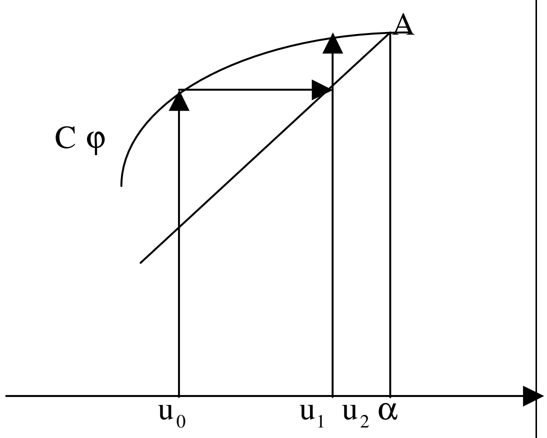
$$x \in [2,3] \quad \varphi(x) = x \ (2) \quad \text{où} \quad \varphi(x) = \sqrt[3]{6x+6}\ ; \quad x \in [-1,+\infty]$$

Montrer que le réel α est l'unique solution de l'équation (2). Le réel α vérifiant $\varphi(\alpha) = \alpha$ est appelé un point fixe de φ sur l'intervalle $I = [2,3]$.

b) Démontrer que l'équation (2) est l'équation aux abscisses des points d'intersection de C_φ et de la droite $\Delta(y = x)$. $A(\alpha,\alpha)$ est l'unique point d'intersection.



(figure1)



(figure 2)

3°question_ Itération par escalier montant (figure 2). Soit la suite numérique définie par: $u_0 = 2 \quad \forall n \in N \quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$

a) Démontrer que $\varphi(I) \subset I$, ainsi la suite (u_n) est définie pour tout entier n. Montrer que $\forall n \in N \quad u_n \in I$.

b) Représenter géométriquement u_0, u_1, u_2, et u_3. Voir indication ci-contre. Que peut-on conjecturer pour la suite (u_n) ?

c) Démontrer que la suite (u_n) converge vers α l'unique point fixe de φ sur [2,3]. On utilisera la continuité de φ sur [2,3] et en particulier en α.

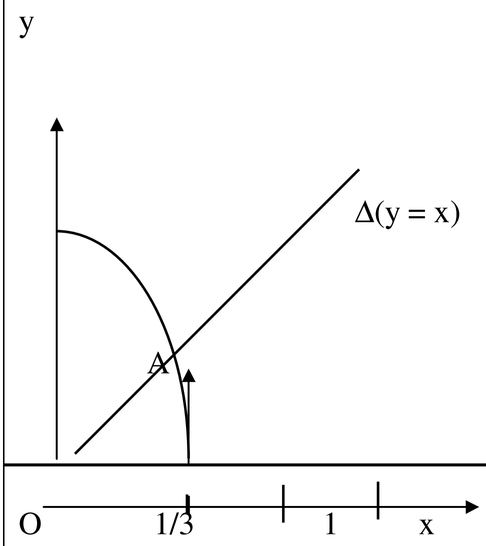
4°question A partir de l'organigramme proposé ou d'un autre (de votre initiative), calculer $u_1, u_2, \ldots, u_{10}$. Que peut-on conclure ?
(Voir organigramme en annexe 3).

Exemple 2

Soit l'équation $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$; $x^3 + 3x - 1 = 0$ (1)

1°question_ Démontrer que (1) admet une solution unique $\alpha \in [0,1/3]$. Déterminer par dichotomie un encadrement de α d'amplitude 10^{-6}. Combien de dichotomies sont-elles nécessaires ?

2°question_ a) Démontrer que l'équation (1) équivaut sur $I = [0,1/3]$ à :
$\varphi(x) = x$ (2) ,où φ est definie sur $]-\infty, 1/3]$ par $\varphi(x) = \sqrt[3]{1 - 3x}$.
Le réel α est donc l'unique solution de (2), donc l'unique point fixe de φ sur [0,1/3].
b) Démontrer que (2) est l'équation aux abscisses des points communs à C_φ et Δ (y = x).



3°question Comme pour l'exemple précédent, on pose $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

Calculer $u_1, u_2, \ldots, u_{10}$. Que peut-on conclure ? Pour la fonction φ, rechercher les propriétés qui diffèrent entre les exemples 1 et 2.

Ainsi, il est toujours possible de ramener la résolution et l'approche d'une solution de l'équation du troisième degré à une équation à point fixe $\varphi(x) = x$. L'approche de α se fait alors par itération du type: $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

- Lorsque la méthode fonctionne, la convergence semble plus rapide que par la dichotomie. Pourquoi ? On ne peut répondre dès maintenant.
- Parfois, le point fixe α ne peut être approché par itération(exemple 2). Pourquoi ? Comment faire dans ce cas pour accélérer la convergence vers α. Nous essaierons de répondre, en partie, au chapitre 5.

I
LE PRINCIPE DE LAGRANGE
EN TS (SPECIALITE MATH)
(1° piste)

Les prérequis: Suites monotones et bornées, suites adjacentes et les Théorèmes admis sur les limites de suites et de fonctions, conformément au programme de Juin 1994.

ACTIVITE LIMINAIRE

-A- Ligne droite et lignes brisées

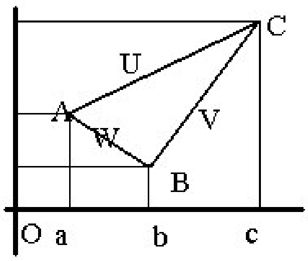


fig1

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $R(O,i,j)$. Soit trois points A, B et C distincts deux à deux, dont les coordonnées sont respectivement : (a,a'), (b,b') et (c,c').

On désigne par W,U, et V les coefficients directeurs respectifs des droites (AB), (AC) (CB). Dans ce repére nous dirons, par commodité" pente" d'une droite pour coefficient directeur

a) Démontrer que U,V et W vérifient la relation suivante :

$$(b-a)W = (c-a)U + (b-c)V$$

En d'autres termes, nous dirons que, sur la droite réelle, W est le barycentre du système [1] :

$$\{(U,(c-a));(V,(b-c))\}$$

b) Que peut-on dire de W si $c=\dfrac{a+b}{2}$?

c) A quelle condition portant sur a,b et c, le réel W est-il compris entre U et V ? Dans la suite, on énoncera ce résultat sous la forme suivante:

lemme 1 Si a < c < b, alors la pente de (AB) est comprise entre celle de (AC) et celle de (CB).

-B- Pentes des sécantes à Cf

Soit une fonction f définie et dérivable sur le segment [a,b], sa dérivée étant positive; c'est à dire: $\forall x \in [a,b]\ \ f'(x) \geq 0$. Donc la pente de la tangente en tout point du graphe est toujours positive; il est raisonnable de conjecturer à partir du graphe Cf que f est croissante sur [a,b]. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe deux points C et D de Cf, d'abscisses c et d, c < d, tels que la sécante (CD) ait une pente négative. Voyons les conséquences de ceci.

[1] Je remercie Sylviane Gasquet (Auteur de " Fenêtres sur courbes")de m'avoir rappelé cette propriété qui simplifie la rédaction de ce lemme.

HYPOTHESE Ainsi, il existe c et d tels que: $a \le c < d \le b$ et $f(d) < f(c)$

INTERPRETATION GEOMETRIQUE

On désigne par C , D et E les points de Cf d'abscisses respectives c, d et (c+d)/2.(Voir figures 2, 3 et 4 ci-dessous) ;On reprend les notations du A pour U ,V ,et W .

fig 2

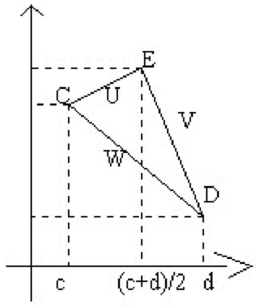


fig 3

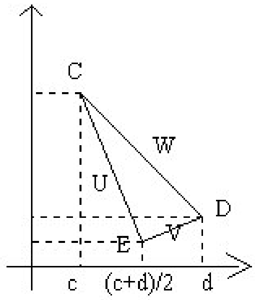
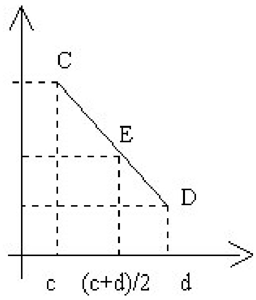


fig 4



Si la pente de la corde (CD) est négative, les figures ci-dessus montrent que nécessairement l'une des pentes des cordes (CE) ou (ED) est également négative.
Ainsi on construit une suite de cordes de Cf telles que: les pentes des cordes sont négatives, et nous verrons, décroissantes . Il est donc légitime de se poser la question; ces cordes ont-elles pour position limite une tangente à Cf, de pente négative, en un point dont l'abscisse est défini par deux suites adjacentes ? D'ou la contradiction.

C Formalisation des considérations géométriques

(ACTIVITE) **ENONCE**

1°question En utilisant le A démontrer la propriété P_1 suivante :
« Si f est définie sur [a,b] et s'il existe deux réels c et d de [a,b] tels que
$c < d$ et $f(d) < f(c)$ alors il existe deux réels c_1 et d_1 appartenant à $[a,b]$ tels que :
$c \le c_1 < d_1 \le d$; $d_1 - c_1 = \dfrac{d-c}{2}$; $\dfrac{f(d_1)-f(c_1)}{d_1-c_1} \le \dfrac{f(d)-f(c)}{d-c} < 0$; l'un des réels c_1 ou bien d_1 étant égal à $\dfrac{c+d}{2}$. »

2° question Démontrer , par récurrence sur l'entier n , que la propriété P_n suivante , est vraie pour tout entier n .On posera $c = c_0$ et $d = d_0$.

P_n « si f est définie sur [a,b] et s'il existe c et d de [a,b] , tels que : $c < d$ et $f(d) <f(d)$ ALORS IL EXISTE deux suites (c_n) et (d_n) de réels de [c,d] tes que:$c_0 \le c_1 \le ....\le c_n < d_n \le ....\le d_1 \le d_0$; $d_n - c_n = \dfrac{d-c}{2^n}$

et $\dfrac{f(d_n)-f(c_n)}{d_n-c_n} \le \dfrac{f(d)-f(c)}{d-c} < 0$. »

3°question En déduire que les réels c_n et d_n définissent deux suites adjacentes dont la limite commune sera appeléeα , $\alpha \in [c,d]$.

COURS

D Etude de la position limite des sécantes (C_nD_n)

La propriété du B3° nous permet d'affirmer qu'il existe un réel α de l'intervalle [c,d] ; limite commune de deux suites adjacentes(c_n) et (d_n), construites par dichotomie au B2°. On appelle F le point de Cf d'abscisse α , et pour tout entier naturel n, on désigne par W_n, U_n, et V_n les coefficients directeurs des droites (C_nD_n), (C_nF) et (FD_n).

Eclairage géométrique

Voir figures (5) et (6) ci-dessous

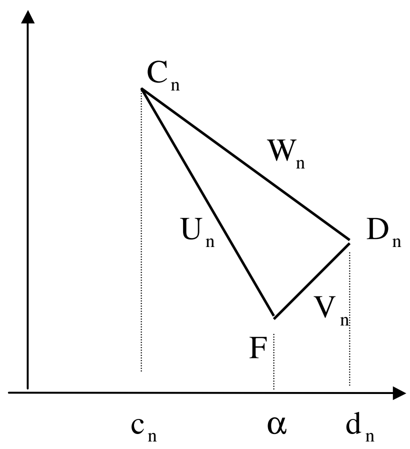


fig5

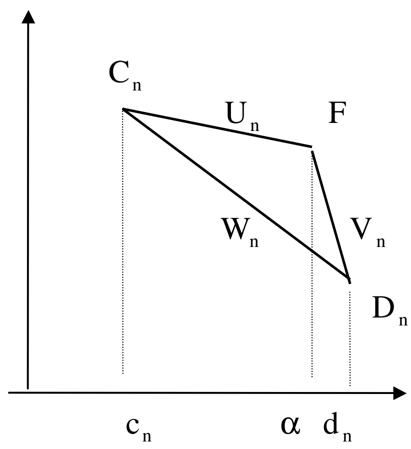


fig6

lorsque n tend vers l'infini ,

(c_n)converge versα et le point C_n tend vers le point F sur la courbe Cf ;
de même (d_n) converge vers α et D_n tend vers le point F sur Cf . On peut donc conjecturer que les cordes (FC_n) et (FD_n) ont pour position limite la tangente en $(F(\alpha, f(\alpha))$ de coefficient directeur $f'(\alpha)$. Soit $(t'Ft)$ cette tangente, par hypothèse $f'(\alpha) \geq 0$ la pente de cette droite est donc positive ou nulle. Or d'après **le lemme 1** (au A) (voir fig5 et 6) $\dfrac{f(d)-f(c)}{d-c}$ est compris entre U_n et V_n . Que devient W_n la pente de la droite (C_nD_n) quand n tend vers l'infini ?

démonstration: le **lemme1**dit: la pente de(C_nD_n) est comprise entre celle de (C_nF) et celle de (FD_n).En d'autres termes, on peut énoncer:
W_n est le barycentre du système $\{(U_n, \alpha - c_n);(V_n, d_n - \alpha)\}$; les coefficients $\alpha - c_n$ et $d_n - \alpha$ étant positifs, $\forall n \in N \quad W_n \in [U_n, V_n]$ ou $[V_n, U_n]$ (1)

Soit l'application "taux d'accroissement entre α et x" définie par

$$x \in [a,b] - \{\alpha\} \quad \varphi(x) = \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$$

$\varphi(c_n) = U_n$ et $\varphi(d_n) = V_n$ .Puis $\lim(c_n) = \lim(d_n) = \alpha$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} \varphi(x) = f'(\alpha)$

Par composition des limites il vient donc : $\lim(\varphi(c_n)) = \lim(U_n) = f'(\alpha)$ (2)

et $\lim(\varphi(c_n)) = \lim(V_n) = f'(\alpha)$ (3)

D'après les relations (1) ,$|W_n - U_n| \le |U_n - V_n|$; puisque $\lim(U_n - V_n) = 0$ alors $\lim(W_n - U_n) = 0$; puisque (U_n) converge vers $f'(\alpha)$,la suite(W_n) converge aussi vers $f'(\alpha)$: $\lim_{n\to\infty}(W_n) = f'(\alpha)$ (4) d'où le résultat:

Lemme 2 Si f est dérivable en un point α, si (c_n) converge vers α en croissant et (d_n) converge vers α en decroissant, alors $\left(\frac{f(d_n) - f(c_n)}{d_n - c_n}\right)$ converge vers $f'(\alpha)$.

Par ailleurs, rappelons la propriété démontrée au B, elle entraîne :

$$\forall n \in N \quad W_n \le \frac{f(d) - f(c)}{d - c} < 0 \quad \Rightarrow \quad \lim(W_n) \le \frac{f(d) - f(c)}{d - c} < 0$$

$$\text{Ainsi } f'(\alpha) \le \frac{f(d) - f(c)}{d - c} < 0 \text{ , soit } f'(\alpha) < 0$$

Ce résultat contredit l'hypothèse , donc nécessairement si c < d alors f(c) ≤ f(d). Ainsi f est croissante sur [a,b] . Si pour tout x de [a,b] , $f'(x) \le 0$, en appliquant le résultat précédent à -f , on obtient : si $f'(x) \le 0$ sur [a,b] alors f est décroissante sur cet intervalle; concluons:

<u>théorème1</u> (principe de Lagrange) Si f est dérivable sur [a,b] et $f'(x) \ge 0$ sur [a,b](resp. $f'(x) \le 0$ sur [a,b])alors f est croissante (resp décroissante) sur cet intervalle .
<u>Corollaire 1</u> Si f est dérivable sur [a,b] et sa dérivée nulle sur [a,b] alors f est constante sur cet intervalle.

<u>Preuve du corollaire</u>: $\forall x \in [a, b]$ $f'(x) \ge 0$ et $f'(x) \le 0$.Donc le théorème implique: f est croissante et décroissante sur [a,b]. Soir un réel fixé $x_0 \in$ [a,b].
Pour tout x ∈ [a,b]: si $x <_0$ alors $f(x) \le f(x_0)$ et $f(x) \ge f(x_0)$ donc $f(x) = f(x_0)$.
De même si $x > x_0$ alors $f(x) = f(x_0)$.
Remarque 1: Si f'(x)≥0 sur un intervalle I qui n'est pas un segment (fermé borné) les démonstrations ci-dessus restent vraies. On énoncera le théorème et son corollaire en remplaçant au besoin [a,b] par:]a,b[, [a,b[,]a,b] où a et b sont des réels , ou +∞, ou – ∞.
Remarque 2: Si f'(x)≥ 0 sur un intervalle I de R et ne s'annule sur aucun sous-intervalle de I, on peut en déduire que f est strictement croissante sur I.
<u>Preuve</u>: Supposons qu'il existe c et d de l'intervalle I tels que:

f'(x)≥ 0 sur I et f(c) = f(d)

Alors le théorème implique: f est croissante (au sens large) sur [c,d]. Pour tout x de [c,d], on a donc: f(c)≤ $f(x) \le f(d)$; donc f(x) = f(d) et f est constante sur l'intervalle [c,d], ce qui est contraire à l'hypothèse.

Corollaire 2: En terminale S (SpécialitéMath) il suffit d'énoncer pour les besoins: Si f est dérivable sur l'intervalle I de R et f'(x)≥ 0 sur I, f' s'annulant seulement en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur l'intervalle I.

III INEGALITE DES ACCROISSEMENTS FINIS COMME APPLICATION DU PRINCIPE DE LAGRANGE:

Lemme:Si f et g sont dérivables sur [a,b] et a < b, tels que: pour tout x de [a,b]
$f'(x)$ $\leq g'(x)$ alors $f(x)-f(a)\leq g(x)-g(a)$ **.**

Preuve:sur $[a,b]$ $0\leq g'(x)-f'(x)$, soit $0\leq (g'-f')(x)$

Ainsi, $\forall x\in[a,b]$ $0\leq (g-f)'(x)$ donc $g-f$ est croissante sur [a,b].

$$\forall x\in[a,b]\quad a\leq x \quad\Rightarrow\quad (g-f)(a)\leq (g-f)(x) \text{ et } g(a)-f(a)\leq g(x)-f(x)$$

$$\text{Enfin:}f(x)-f(a)\leq g(x)-g(a).$$

Théorème2 appelé inégalité des accroissements finis.
Si f est dérivable sur [a,b] (a<b) et s'il existe m et M réels constants tels que $\forall x\in[a,b]$ $m\leq f'(x)\leq M$,

ALORS pour tout x de $[a,b]$, $m(x-a)\leq f(x)-f(a)\leq M(x-a$

Preuve: La constante M est, sur [a,b], la dérivée de $x\rightarrow Mx$,
la constante m est, sur [a,b], la dérivée de $x\rightarrow mx$.

Appliquons le lemme ci-dessus à f et à $x\rightarrow Mx$; $f'(x)\leq M$ entraîne

$$f(x)-f(a)\leq M(x-a).$$

De même, appliquons le lemme à f et à $x\rightarrow mx$; $m\leq f'(x)$ entraîne

$$m(x-a)\leq f(x)-f(a).$$

D'où le résultat annoncé:

Corollaire (forme la plus utilisée en TS de l'inégalité ci-dessus):
Si f est dérivable sur l'intervalle I et s'il existe un réel positif constant M tel que: pour tout x $\in I$, $|f'(x)|\leq M$ ALORS pour tous réels a et b de l'intervalle I, on a **:**$|f(b)-f(a)|\leq M|b-a|$

Preuve:

$$\forall x\in I\qquad -M\leq f'(x)\leq M \quad\text{entraine}$$

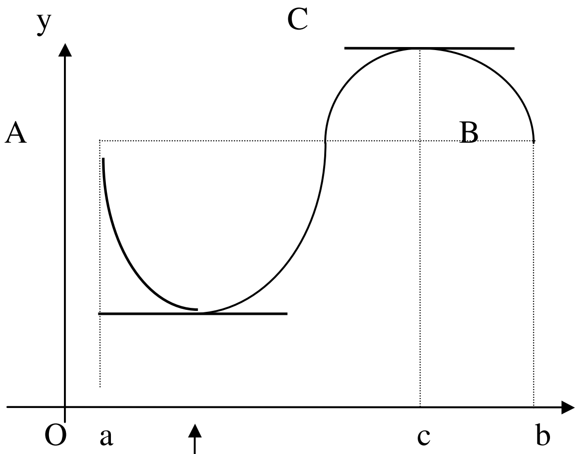
$$-M(x-a)\leq f(x)-f(a)\leq M(x-a)$$

$$\text{Si } x=b,\ b\neq a\qquad -M(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq M(b-a),$$

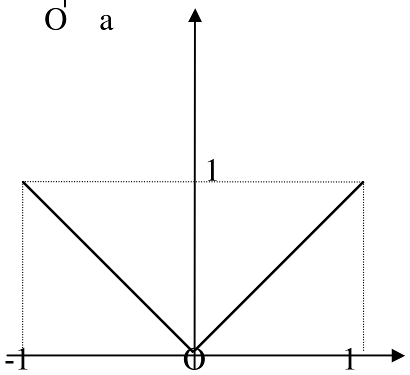
LE THEOREME DE ROLLE

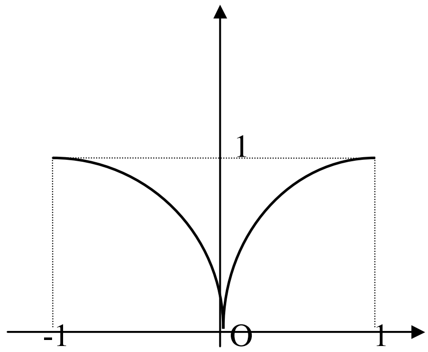
2°Piste

I théorème de Rolle



Le graphe ci-contre Cf où f est continue sur [a,b] et dérivable sur]a,b[, avec f(a) =f (b), nous conduit à considérer comme nécessaire l'existence d'au moins un point C de Cf où la tangente est parallèle à Ox, c'est à dire d'un réel c de]a,b[tel que f '(c) = 0.





$f\begin{cases}[-1,1] \to [0,1] \\ x \to |x|\end{cases}$ $g\begin{cases}[-1,1] \to [0,1] \\ x \to \sqrt{|x|}\end{cases}$

Ces deux exemples montrent la nécessité pour f d'être au moins dérivable en tout point de]a,b[

Démonstration

Soit f, continue sur [a,b], dérivable sur $]a,b[$ et f(a) = f(b) ; l'image du segment [a,b] est un segment [m,M] (théorème admis au chapitreII). Ecartons le cas trivial où la fonction est constante. Supposons $M \neq f(a)$, sinon, nous choisirons m. Le maximum M est atteint au moins une fois par f : il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = M$.

La fonction φ " taux d'accroissement de f entre x et c **;** $x \in]a,b[- \{c\}$" est définie par

$\varphi :\ x \to \dfrac{f(c)-f(x)}{c-x}$.

Lorsque $x \in]a,c[$, M étant le maximum absolu de f, $\forall x \in]a,c[\quad \varphi(x) \geq 0$

Alors, $\lim\limits_{\substack{x\to c \\ x<c}} \varphi(x) \leq 0$: la dérivée à gauche de f en c est positive (1)

De même, $\forall x \in]c,b[$; $\dfrac{f(c)-f(x)}{c-x} \leq 0$, soit $\varphi(x) \leq 0$.

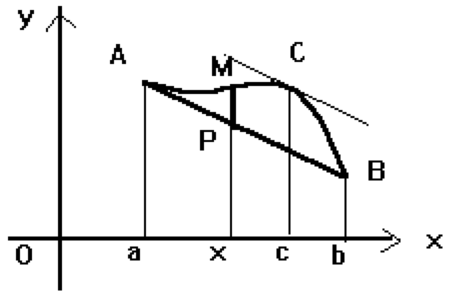
Alors, $\lim\limits_{\substack{x\to c \\ x>c}} \varphi(x) \leq 0$: la dérivée à droite de f en c est négative. (2)

Puisque f est dérivable en tout point de $]a,b[$, en particulier en c, la dérivée à droite et à gauche en c sont égales à f '(c); par suite les assertions (1) et (2) entraînent f '(c) = 0.

Théorème 1 (de Rolle)

Si f est continue sur l'intervalle [a,b], dérivable sur]a,b[et telle que f(a) = f(b) ALORS il existe au moins un réel c de]a,b[tel que f'(c) = 0.

II Théorème des accroissements finis:



L'hypothèse f(a) = f(b) absente, le graphe nous suggère l'existence d'un réel c tel qu'en C(c,f(c)), la tangente à Cf est parallèle à (AB).

Démonstration:

pour tout x appartenant à [a,b], la parallèle à (Oy) d'équation (X=x) coupe la corde (AB) et Cf respectivement en P et M.

Posons:

$\forall x \in [a,b] \;\; \varphi(x) = \overline{PM}$ et $m = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ le coefficient directeur de (AB).

Géométriquement la fonction $\overline{PM}$ sur la figure ci-contre s'annule en a et b, admet un maximum en $c \in]a,b[$. Intéressons nous donc à φ.

y-f(a) = m(x-a) est une équation cartésienne de la droite (AB). M a pour ordonnée f(x), et P a pour ordonnée f(a) + m(x-a). Il vient donc, pour tout x de [a,b] $\varphi(x) = f(x) - f(a) - m(x-a)$.

φ définie et continue sur [a,b], dérivable sur]a,b[, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$; donc le théorème de Rolle assure l'existence d'au moins un réel c de]a,b[tel que: $\varphi'(c) = 0$; c'est à dire f '(c)-m=0: donc f '(c)=m , c'est à dire $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ donc f(b)-f(a) = f '(c)(b-a).

Théorème 2 (des accroissements finis).
Si f est continue sur [a,b] et dérivable sur]a,b[, **ALORS** il existe au moins un réel c de l'intervalle]a,b[tel que: f(b)-f(a) = f '(c)(b-a).

On en tire de façon évidente l'énoncé suivant:

Corollaire: Inégalité des accroissements finis**.** Si **f est dérivable sur l'intervalle I et si** $\forall x \in I \;\; |f'(x)| \le M$**,** ALORS **tous réels a et b de I vérifient** $|f(b)-f(a)| \le M|b-a|$**.**

Théorème 3(Principe de Lagrange).
Si f est dérivable sur l'intervalle I et si $\forall x \in I \quad f'(x) \ge 0$ **ALORS** f est croissante sur l'intervalle I.

Démonstration. Soit a < b éléments de I, d'après le théorème des accroissements finis il existe au moins un c de]a,b[tel que: f(b)-f(a) = f '(c)(b-a) ; puisque f '(c) ≥ 0 alors f(b)-f(a) ≥ 0, soit f(b) ≥ f(a). Donc f est croissante sur I.

On écrira l'énoncé dual lorsque f '(x) ≤ 0 sur I.

Théorème 4 **Si** f est dérivable sur I et si $\forall x \in I \quad f'(x) = 0$ **ALORS** la fonction f est constante sur I.

Démonstration. **:**

Soit un reel $x_0 \in I, \forall x \in I, \; \exists \; c \in]x_0, x[$; tel que $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) = 0$

donc $f(x) = f(x_0) = \text{constante}$

CHAPITRE 5

ACCELERATION DE CONVERGENCE

I Enoncé du problème : Existence d'un point fixe
II Travaux pratiques : Reprise des exemples du chapitre 4.
ANNEXE: Eléments de solution du problème proposé au I chapitre 5.

PREAMBULE

Dans les premiers chapitres de cette étude, nous avons appris à isoler les zéros d'une fonction continue. Nous avons approché ces zéros par dichotomie, en remarquant la lenteur relative du procédé.
En début du chapitre 4, la mise au point de la méthode du point fixe nous a montré que la suite récurrente ne converge pas toujours.

1) Dans le développement qui suit, nous recherchons des conditions suffisantes pour que ce procédé donne une suite(u_n) qui converge vers α, le zéro que l'on désire approcher.
Donc dans ce chapitre, nous supposerons:

a) que α solution de l'équation $\varphi(x) = 0$ a pu être isolée dans un intervalle [a,b].

b) que l'équation $\varphi(x) = 0$ équivaut à $f(x) = x$ où f est dérivable sur [a,b]. Donc α est un point fixe de f.

c) enfin, nous utiliserons **les nouveaux acquis du chapitre 4: l'inégalité des accroissements finis.**

2) Lorsque la suite récurrente converge vers α nous essaierons de déterminer, ou plutôt **de constater ce qui commande la rapidité de cette convergence.** Enfin, pour les valeurs approchées décimales de α, nous rechercherons **un majorant de l'erreur**, comme il se doit dans tout procédé d'approximation.

I Enoncé du problème: existence d'un point fixe

-A- Résultat liminaire

On suppose f définie et continue sur le segment I = [a,b], et de plus, $f(I) \subset I$, c'est à dire pour tout x de I, f(x) appartient à I.
Démontrer que f admet alors au moins un point fixe α appartenant au segment [a,b]. On utilisera la fonction φ: $x \rightarrow f(x) - x$_ définie sur I. Enoncer le résultat sous la forme d'un lemme.

-B- f est croissante sur l'intervalle [a,b]

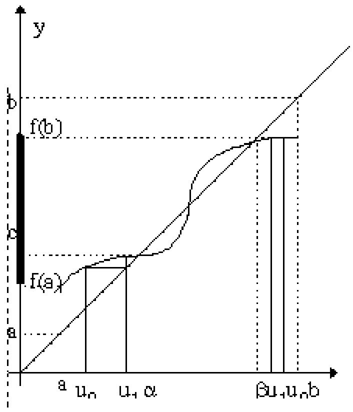
Les hypothèses sur la fonction f étant celles du lemme ci-dessus avec, de plus, f croissante sur I, on définit la suite(u_n) par $u_0 \in [a, b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Démontrer que $\forall n \in N,\ u_n \in I$ ainsi, (u_n)est définie sur N.

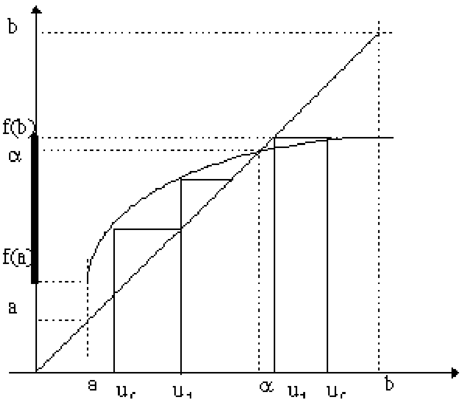
b) On suppose$u_1 \geq u_0$; démontrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, point fixe de f sur I.

c) On suppose$u_1 \leq u_0$; démontrer que (u_n) converge vers un réel ℓ', point fixe de f sur I.

Ainsi, dans tous les cas, la suite (u_n) converge vers un point fixe de f.



Itération en escalier montant (vers α) et descendant (vers β)



Cas de figure d'un point fixe unique de f sur [a,b]

-C- f est décroissante sur [a,b]

Les hypothèses sur f restent celles du lemme, cette fois f est décroissante sur I = [a,b].

1°question Démontrer que $f \circ f$ est croissante sur I et que $f \circ f(I) \subset I$, c'est à dire, pour tout x de I, $f(f(x)) \in I$.

2°question Démontrer que f admet un point fixe unique $\alpha \in$ I.

3°question Soit (u_n) dé finiepar: $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ ..

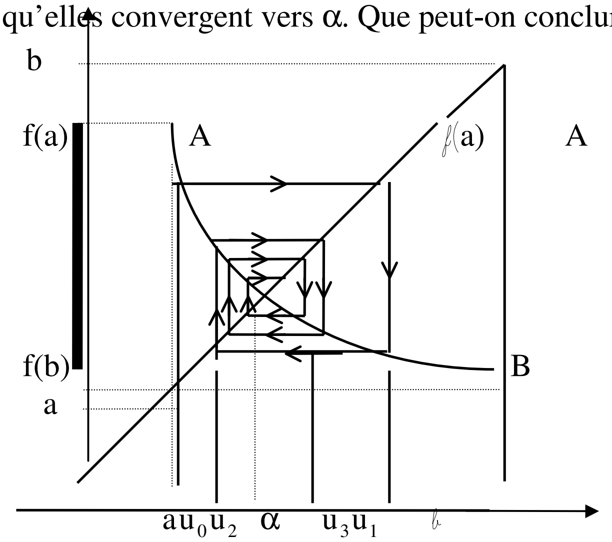
a) Démontrer que $\forall n \in N,\ u_n \in I$. Ainsi (u_n) est définie sur N.

b) On considère la suite des termes de rang pair, extraite de (u_n).

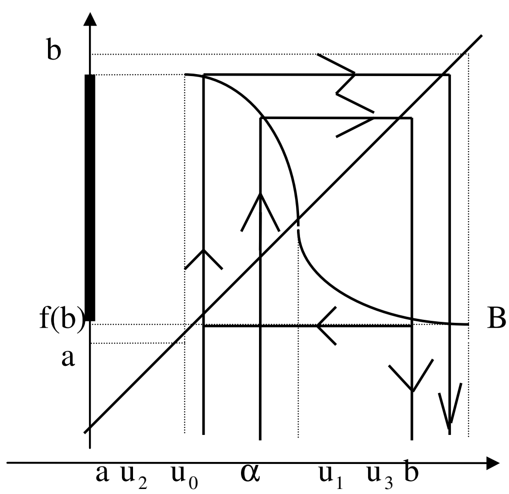
Soit: $u_0, u_2, \ldots, u_{2p}, u_{2p+2}, \ldots$que l'on note (u_{2n}). De même soit la suite extraite de (u_n), des termes de rang impair. Soit:$u_1, u_3, \ldots u_{2p+1}, u_{2p+3}, \ldots$que l'on note (u_{2n+1}).

On suppose $u_0 < \alpha$ et $u_0 \leq u_2$. Démontrer que la suite (u_{2n}) converge vers ℓ, point fixe de $f \circ f$, et que la suite (u_{2n+1}) converge vers ℓ' également point fixe de $f \circ f$ sur I. c) Reprendre la même question sachant que $\alpha < u_0$ et $u_2 \leq u_0$.

4°question Quelle propriété supplémentaire manque-t-il aux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) pour qu'elles convergent vers α. Que peut-on conclure alors pour la suite (u_n)?



Spirale convergente



Spirale divergente

$u_0 < \alpha$ et $u_0 \le u_2$

-D- Rapidité de convergence vers le point fixe de f

Les hypothèses sont $\begin{cases} f \text{ continue sur } I = [a,b] \quad (1) \\ f(I) \subset I \quad (2) \\ f' \text{ existe sur } I \\ \text{et il existe } k \in]0,1[\text{ tel que } \forall x \in I \ |f'(x)| \le k \ (3). \end{cases}$

f n'est donc plus supposée monotone sur [a,b].

1°question a) Démontrer que f admet au moins un point fixe sur [a,b] (voir A. lemme) b) Démontrer que ce point fixe est unique. On le note α. On utilisera, en raisonnant par l'absurde, l'inégalité des accroissements finis.

2°question a) Soit la suite définie par $u_0 \in I$, et $\forall n \in N \ u_{n+1} = f(u_n)$; démontrer que tous les termes de (u_n) appartiennent à I, ainsi la suite est définie sur N.

b) Démontrer que: $\forall n \in N$, $|u_{n+1} - \alpha| \le k|u_n - \alpha|$ (i)

c) En déduire: $\forall n \in N$, $|u_n - \alpha| \le k^n |u_0 - \alpha|$(ii)

Conclure que la suite (u_n) converge vers α.

3°question_ Utiliser la relation (ii) pour conjecturer ce qui gouverne la rapidité de la convergence de la suite (u_n).

II Travaux pratiques : reprise des exemples du chapitre 4

<u>Remarque liminaire</u>

Le D du § I nous fournit des conditions suffisantes de convergence de la suite récurrente; elles sont très fortes puisqu'elles majorent l'erreur $|u_n - \alpha|$ par un terme en k^n .On dira que la convergence de $(u_n - \alpha)$ est en k^n . Dans l'approche de α par dichotomie , au rang n , on a : $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}$, et $a_n \le \alpha \le b_n$

si b-a = 1: nous dirons que la convergence est géométrique en $\frac{1}{2^n}$. Par exemple si k= 0,9 alors $k^{20} = 0{,}122$, tandis que $\frac{1}{2^{20}} \approx 10^{-6}$;donc la dichotomie est ici plus rapide , ou l'itération est peu intéressante. Par contre si k = 0,10 ; $k^6 = 10^{-6}$; cette fois l'itération est très rapide .

§1 reprise de l'ex1(chap 4)

$x \in [2,3] \quad x^3 - 6x - 6 = 0 \ (1) \quad \Leftrightarrow \quad x \in [2,3] \ \sqrt[3]{6x+6} = x = \varphi(x)$

Les propriétés de φ permettent de démontrer que de la suite définie par: $u_0 = 2 \quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$, converge vers la solution unique de (1) .Cependant , nous n'avons pas maîtrisé la rapidité de convergence ni un majorant de l'erreur en approchant α .$\varphi'(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{(6x+6)^2}}$; la fonction $x \to \sqrt[3]{(6x+6)^2}$ est croissante sur [2,3]; son inverse est donc décroissante ; ainsi φ' est décroissante sur [2,3] . Ainsi M , un majorant , est $\varphi'(2) = \frac{2}{\sqrt[3]{18^2}} \approx 0{,}21$ .L'inégalité des accroissements finis entraîne que la convergence est géométrique en$(0{,}22)^{10} = 2{,}710^{-7} < 10^{-6}$.

Donc 10 termes suffisent, alors qu'il en fallait 20 par dichotomie; de plus $(0{,}22)^n$ est un majorant de l'erreur recherché.$u_{10} \le \alpha \le u_{10} + (0{,}22)^{10}$, car la suite est croissante.

§ 2 Reprise de l'ex2 (chap 4)

$x \in \left[0,\frac{1}{3}\right]\ x^3+3x-1=0$ (3) $\Leftrightarrow x \in \left[0,\frac{1}{3}\right]\ \sqrt[3]{1-3x} = x = \varphi(x)$

La dichotomie donne pour n=20 : $0{,}322184 \le \alpha \le 0{,}322185$

L'itération ne fournit pas une suite convergente ;peut-on savoir pourquoi?

$x \in \left[0,\frac{1}{3}\right[\ |\varphi'(x)| = \dfrac{\frac{1}{3}}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}$; sur cet intervalle on montre (voir §2) que $|\varphi'|$, est croissante.

Alors M = $|\varphi'(0{,}333)| \approx 300$, et l'inégalité $|u_n-\alpha| < 300^n$ ne permet pas de conclure. Il faudra envisager d'autre méthode (Newton-Raphson) , ou modifier φ comme dans l'exercice suivant .

<u>Exercice</u> 1°) Soit l'équation : $x \in R\ x^3+3x-1=0$ (1). Démontrer que (1) admet une solution unique $\alpha \in \left[0,\frac{1}{3}\right]$. 2°) On pose pour tout réel $\lambda > 0, \varphi(x) = x - \lambda f(x)$ ou $f(x) = x^3+3x-1$; Démontrer que α est point fixe de φ sur $\left[0,\frac{1}{3}\right]$. 3°) Déterminer la valeur du réel λ pour que $\varphi'(\frac{1}{3}) = 0$

4°) Prouver que : $\forall x \in \left[0,\frac{1}{3}\right]\ |\varphi'(x)| \le k$, $k \in]0,1[$.

5°) En s'inspirant des exemples 1 et 2 ci-dessus ,donner une méthode d'approximation de α par une suite récurrente $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

Eléments de solution de l'exercice

1°) f est continue et strictement croissante sur R , de plus f(0)f(1/3) < 0, donc l'équation (1) admet une solution unique $\alpha \in \left[0,\frac{1}{3}\right]$. 2°)

$\varphi(\alpha) = \alpha - \lambda f(\alpha) = \alpha - \lambda.0 = \alpha$, donc α point fixe de φ.

3°) $\varphi'(x) = -3\lambda x^2 - 3\lambda + 1$; $\varphi'(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}\lambda + 1 - 3\lambda = 1 - \frac{10}{3}\lambda$

$$\varphi'(\frac{1}{3}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{3}{10}$$

4°) Soit $\varphi(x) = -\frac{3}{10}x^3 + \frac{1}{10}x + \frac{3}{10}$, $\varphi'(x) = -\frac{9}{10}x^2 + \frac{1}{10}$

φ' est décroissante et positive sur $\left[0,\frac{1}{3}\right]$, donc $M = \varphi'(0) = \frac{1}{10}$

5°) On pose k=1/10 , 0 < k< 1 , l'inégalité des accroissements finis conduit comme dans les exemples 1 et 2 à une suite convergente. En utilisant le programme: $u_4 = 0{,}322185$, le terme de rang 4 a la précision atteinte au terme de rang 20 par dichotomie ; c'était prévisible puisque k=0,1 . Pour α un majorant est : $|u_n - \alpha| \le \frac{1}{3}(\frac{1}{10})^n$

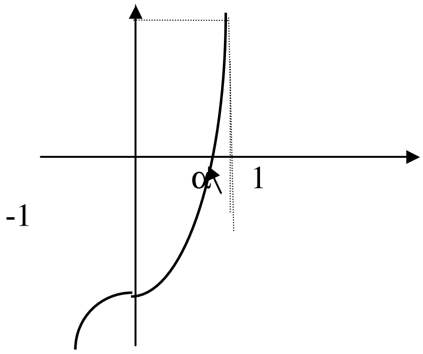
ANNEXE 1

Eléments de solutions des problèmes posés au I et II §1 <u>Stade graphique</u>

$f:\ x \to x^3 + 2x - 1$, f est une somme de deux fonctions strictement croissantes sur R ;

$x \to x^3$ et $x \to 2x - 1$, donc f est strictement croissante sur R.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f(x)	$-\infty$	-1	2	$+\infty$



On peut conclure que l'équation (1) admet une solution $\alpha \in]0,1[$ et, puisque f est strictement croissante, cette solution est unique. En effet, supposons x et x' éléments de [a,b] tels que $x < \alpha < x'$, alors $f(x) < 0 < f(x')$. L'aspect de la courbe représentative rend ce résultat évident. ***Puisque ce résultat a un caractère évident, dans un premier temps, développons une méthode de calcul de valeurs approchées du réel α.*** <u>NB</u> Dans un cours à l'Ecole Polytechnique (1821) Cauchy considère que cette interprétation graphique à valeur de démonstration, et c'est seulement dans la note III de son ouvrage « Analyse Algébrique » sur la résolution numérique des équations, qu'il précise une "démonstration", en fait: une approximation de la solution à une précision arbitraire, utilisant une variante de la dichotomie.

§2Stade calculatoire 1° question

n	a_n	b_n
0	0	1
1	0	0.5
2	0.25	0.5
3	0.375	0.5
4	0.4375	0.5
5	0.4375	0.46875
6	0.453125	0.46875
7	0.453125	0.4609375
8	0.453125	0.45703125
9	0.453125	0.455078125
10	0.453225	0.4541015625

Puisque pour tout entier $n \leq 10$ $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$ et $a_n \leq \alpha \leq b_n$ donc les nombres décimaux a_n et b_n sont respectivement des valeurs approchées par défaut et par excès de α dont l'existence est constatée sur le graphique au §1.

a_n c_n b_n

2° question On peut conjecturer que: la suite (a_n) est croissante et majorée par $b_0 = b$, la suite (b_n) est décroissante et minorée par $a_0 = a$; enfin que toutes les deux convergent vers le même nombre α, solution de (1).

3° question Supposons que α, solution évidente sur le graphe, soit un rationnel, alors $\alpha = \frac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers premiers entre eux.

$f(\alpha) = 0$ donne $(\frac{p}{q})^3 + 2(\frac{p}{q}) - 1 = 0$; soit $p^3 + 2pq^2 = q^3$

Cette égalité montre que p divisant le premier nombre, il divise q^3 donc p divise q, ces entiers étant premiers entre eux, nécessairement p = 1. Dans ce cas:$1 + 2q^2 = q^3$;$q^2(q-2) = 1$, ce qui est impossible. Par conséquent, α n'est pas un rationnel; par suite on ne peut avoir un entier n tel que $\alpha = \frac{a_n + b_n}{2}$, ce dernier $\frac{a_n + b_n}{2}$ étant rationnel, ici décimal, puisque $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ le sont, ainsi que tous les a_n et b_n. Ainsi, la solution α, si elle existe, est un nombre non rationnel, ce qui implique que le processus de construction des nombres (a_n) et (b_n) n'est pas fini. Donc la calculatrice, si puissante fut-elle, ne permettra pas d'obtenir la valeur de la solution puisque celle-ci est irrationnelle. Ainsi α, dont l'existence et l'unicité sont assurés, sa valeur ne nous est pas accessible par ce procédé. Il faudrait, pour α, un moyen de le définir autrement que par des valeurs approchées, lui donner un statut, en tant que nombre, indépendant du problème étudié ici. C'est la démonstration du théorème de Bolzano qui le permettra.

ANNEXE 2

ANNEXE : Eléments de solutions

I 1°question

a)P(X) = aQ(x); si $h = -\frac{b}{3a}$ alors

$$Q(x) = x^3 + \frac{1}{a}(3ah^2 + 2bh + c)x + \frac{1}{a}(ah^3 + bh^2 + ch + d)$$

Si α est racine de P(X) alors $P(\alpha) = 0$ donc $Q(\alpha - h) = 0$ et $\alpha - h$ est racine de Q(x); et réciproquement. Ainsi P et Q ont même nombre de racines et si c est racine de Q(x) alors c+h est racine de P(X).

En conclusion : résoudre P(X) = 0 équivaut à résoudre Q(x)=0.

b) h=2 , X =x+2 , P(X) = $(x+2)^3 - 6(x+2)^2 + 15(x+2) - 15$

Donc $Q(x) = x^3 + 3x - 1$; p=1, q =-1.

I 2°question a)

$x^3 + 3px + q = 0$; si $p = 0$ $x^3 = -q$

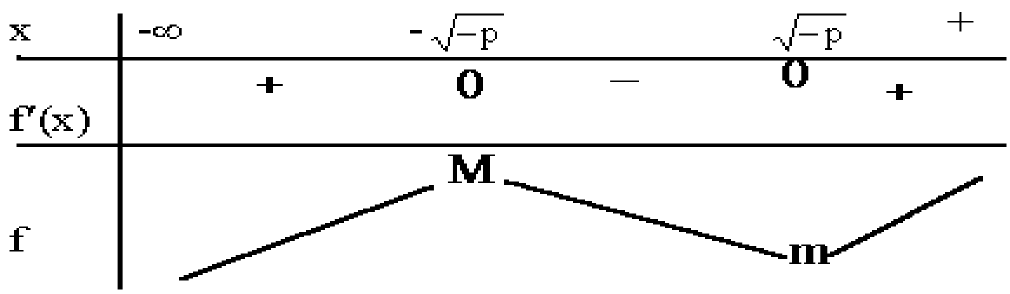
- $q < 0$ alors $\alpha = \sqrt[3]{-q}$ solution unique
- $q > 0$ alors $\alpha = \sqrt[3]{q}$ solution unique
- $q = 0$ $x(x^2 + 3p) = 0$; si $p > 0$; 0 est solution unique

si $p < 0$ $\left\{-\sqrt{-3p}, 0, \sqrt{-3p}\right\}$

b) Si $\alpha^3 + 3p\alpha + q = 0$ alors $-\alpha^3 - 3p\alpha - q = 0$ donc $(-\alpha)^3 + 3p(-\alpha) - q = 0$
Ainsi $-\alpha$ est solution de $x^3 + 3px - q = 0$. La réciproque est vraie:
$-\alpha$ est solution de $x^3 + 3px - q = 0$.
Conclusion : résoudre $x^3 + 3px + q = 0$ equivaut à resoudre $x^3 + 3px - q = 0$; les solutions sont opposées. Désormais , nous poserons q < 0.
II 1°question a) $f'(x) = 3x^2 + 3p$, $p > 0$, $q < 0$ est positive sur R. La fonction f est $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ continue et strictement croissante
sur R . Le réel 0 admet donc un antécédent unique par f

b) $f'(x) = 3x^2 + 3$, f(0)f(1)=-3 donc $\alpha \in [0,1]$

II 2°question a) $f'(x) = 3x^3 + 3p = 3(x - \sqrt{-p})(x + \sqrt{-p})$



b)
$M = f(-\sqrt{-p}) = -2p\sqrt{-p} + q$

$$M = \frac{4p^3 + q^2}{2p\sqrt{-p} + q}$$

le dénominateur de M est < 0 , M a donc le signe de -Δ
c) **Si Δ > 0** M <0 , l'image de l'intervalle $\left]-\infty, \sqrt{-p}\right[$ par f est $\left]-\infty, M\right] \subset R^{*-}$

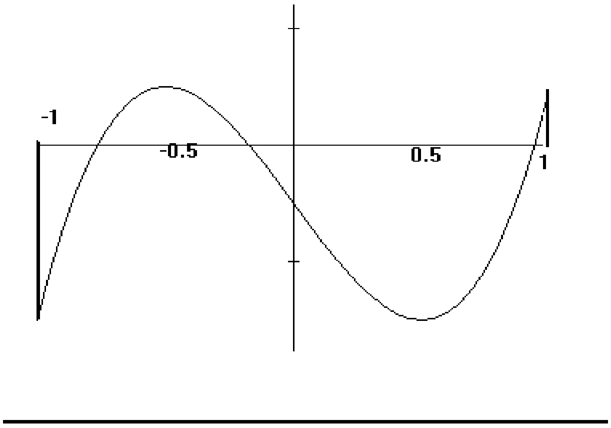
Donc f ne s'annule pas sur $\left]-\infty,\sqrt{-p}\right]$. par contre la restriction de f à $\left[\sqrt{-p},+\infty\right[$ est une bijection de $\left[\sqrt{-p},+\infty\right[$ sur $\left[m,+\infty\right[$; 0 appartient à l'intervalle image ,il admet un antécédent unique α par f.

Si Δ=0 M=0 , $-\sqrt{-p}$ est solution double; l'autre solution appartient à $\left]\sqrt{-p},+\infty\right[$

Si Δ < 0 M>0 ,le même raisonnement donne une solution sur chacun des intervalles

$\left]-\infty,-\sqrt{-p}\right[$, $\left]-\sqrt{-p},\sqrt{-p}\right[$, $\left]\sqrt{-p},+\infty\right[$; en effet m<0 car: $m = 2p\sqrt{-p} + q = f(\sqrt{-p})$.

III 1°question $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$; $f'(x) = 12(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$



en utilisant les th5 et corollaire ,on démontre aisément que l'équation admet trois solutions distinctes ,a ,b ,et c appartenant respectivement aux intervalles :

$$\left[-1,-\frac{1}{2}\right], \left[-\frac{1}{2},0\right] \text{ et } \left[\frac{1}{2},0\right]$$

b) Puisque les trois solutions de (1) appartiennent à [-1,+1], l'équation (1) équivaut à:

$$\begin{cases} 4\cos^3\theta - 3\cos\theta - \frac{1}{2} = 0 \\ x = \cos\theta \end{cases}$$

Donc, $\begin{cases} 4\cos^3\theta - 3\cos\theta - \frac{1}{2} = 0 \\ x = \cos\theta \end{cases}$

$\cos 3\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ (2)

(2) equivaut sur R à $3\theta = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ou $3\theta = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$

$\theta = \frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}$

La fonction cosinus est paire, on retiendra donc les solutions:

$a = \cos\frac{\pi}{9}$, $b = \cos\frac{5\pi}{9}$, $c = \cos\frac{7\pi}{9}$

La calculatrice donne des valeurs approchées des cosinus à 10^{-10}:

a ≈ 0,9396926208 b ≈ -0,1736481777 c ≈ -0,7660444431

III 2°question a) Le tableau de variation (II 2°question) nous indique pour les trois solutions a, b, et c :

$$a < -\sqrt{-p} < b < \sqrt{-p} < c$$

or $f(-2\sqrt{-p}) < 0$ et $f(2\sqrt{-p}) > 0$ Ainsi $a \in \left[-2\sqrt{-p}, -\sqrt{-p}\right]$, $b \in \left[-\sqrt{-p}, \sqrt{-p}\right]$

et $c \in \left[\sqrt{-p}, 2\sqrt{-p}\right]$

Si $\Delta = 0$, $M = 0$, $a = b = -\sqrt{-p}$

alors $x^3 + 3px + q = (x - \frac{q}{p})(x + \sqrt{-p})^2$ $\quad S = \left\{-\sqrt{-p}, \frac{q}{p}\right\}$

b) Posons $x = 2\sqrt{-p}\cos\theta$ car $-1 \leq \frac{x}{2\sqrt{-p}} \leq 1$

L'équation (1) équivaut à:

$-2p\sqrt{-p}\left[4\cos^3\theta - 3\cos\theta\right] + q = 0 \quad \cos 3\theta = \frac{q}{2p\sqrt{-p}}$

Le reel $\frac{q}{2p\sqrt{-p}}$ a pour carré $-\frac{q^2}{4p^3}$; or ici $4p^3 + q^2 < 0$

donc $0 < -\frac{q^2}{4p^3} < 1$; il existe ψ unique $\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos\psi = -\frac{q^2}{4p^3}$

c)

$\cos 3\theta = \cos\psi$ donne $\theta = \frac{\psi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$ et les opposes,

$a = 2\sqrt{-p}\cos\frac{\psi}{3}$, $b = 2\sqrt{-p}\cos\left(\frac{\psi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$, $c = 2\sqrt{-p}\cos\left(\frac{\psi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$

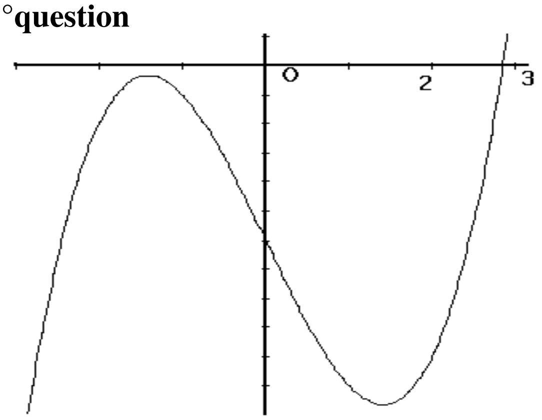
ANNEXE 3

I Eléments de solution de l'activité préparatoire

(formulation du problème sur exemples)

Exemple1

1°question



ci-contre, le graphe, de f tracé sur la calculatrice graphique suffit à montrer que sa restriction à [2,3] (continue) est strictement croissante; de plus f(2)f(3)=-30 est négatif. il existe donc un réel α unique de]1,2[tel que $f(\alpha) = 0$.
20 dichotomies sont nécessaires pour obtenir $2{,}847321 < \alpha < 2{,}847322$

2° question

a) $x \in [2,3]$ $x^3 - 6x - 6 = 0$ (1) $\Leftrightarrow x^3 = 6x + 6$

sur [2,3] 6x+x > 0 donc l'équation équivaut à: $x = \sqrt[3]{6x+6} = \varphi(x)$

L'équation $x \in [2,3]$ $\varphi(x) = x$ admet un solution unique $\alpha \in \left]2,3\right[$, solution de (1)

b) :évident.

3° question

a)φ, compose deux fonctions strictement croissantes, elle est strictement croissante sur [2,3], elle est de même continue; ainsi c'est une bijection de [2,3] sur $[\varphi(2), \varphi(3)] = [2{,}62\ldots;2{,}88\ldots]$. il vient donc: $\forall x \in [2,3]\quad \varphi(x) \in [2,3]$, c'est à dire $\varphi(I) \subset I$

Par récurrence sur l'entier n: $u_0 = 2$, $u_0 \in I$; si $u_p \in I\quad \varphi(u_p) \in I$, soit $u_{p+1} \in I$

b) La construction de u_0, u_1, u_2, u_3 montre un escalier montant; on peut conjecturer que (u_n) est croissante et converge vers α.

c) $u_0 = 2$, $u_1 = 2{,}62\ldots$ donc $u_0 \le u_1$

Supposons, pour un entier p fixé: $u_p \le u_{p+1}$; puisque φ est croissante,

$$\varphi(u_p) \le \varphi(u_{p+1})$$

Soit: $u_{p+1} \le u_{p+2}$ Donc, par récurrence: $\forall n \in N,\quad u_n \le u_{n+1}$.

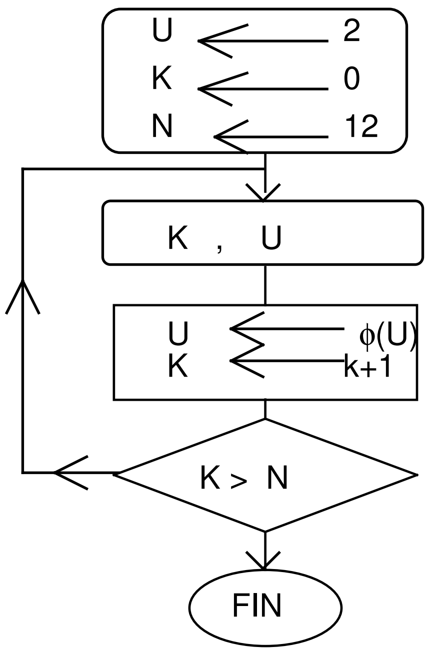
Ainsi, la suite (u_n), croissante et majorée par 3, converge.

L'image par φ de la suite $u_0, u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, u_n, \ldots.$

est la suite $u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots u_{n+1}\ldots\ldots\ldots$

Les deux suites, diffèrent uniquement par u_0, et converge respectivement vers ℓ et $\varphi(\ell)$. Puisque φ est continue; on a donc $\ell = \varphi(\ell)$[1]; $\ell \in]2,3[$; ainsi $\ell = \alpha$ l'unique point fixe de φ sur I.

4°question



Initialisation des données: φ est en Y1, 2 va dans U,0 va dans K, et 12 va dans N.

---

afficher K et U

U reçoit φ(u)
le compteur K reçoit K+1

Si K > 12 arrêt des calculs, sinon reprendre à: afficher K et U.

---

[1] Théorème admis en T.S.

0	2
1	2,620741
2	2,790291
3	2,833182
4	2,843829
5	2,846460
6	2,847109
7	2,847269
8	2,847309
10	2,847321

Conclusion
A la 1° question, 20 dichotomies sont nécessaires pour atteindre la précision 10^{-6}
lors de la 4° question, 10 boucles suffisent pour la même précision. La méthode du point fixe semble "plus rapide".

II Eléments de solution de l'activité (1°piste: principe de Lagrange)

A question a) $U = \dfrac{c'-a'}{c-a}$; $V = \dfrac{b'-c'}{b-c}$; $W = \dfrac{b'-a'}{b-a}$. On écrit b'-a' = (b'-c') + (c'-a') (1)

Faisons apparaître U, V, W : (1) s'écrit: $(b-a)\dfrac{b'-a'}{b-a} = (b-c)\dfrac{b'-c'}{b-c} + (c-a)\dfrac{c'-a'}{c-a}$

c'est à dire: (b-a)W = (c-a)U + (b-c)V (2)

A question b) Si $c = \dfrac{a+b}{2}$, c-a = b-c, donc W est l'isobarycentre de U et V; $W = \dfrac{U+V}{2}$.

Sur la droite réelle, W est le milieu du segment [U,V].

A question c) plus généralement, si les coefficients de U et V sont de même signe, c'est à dire si a < c < b alors $W \in [U, V]$

ANNEXE4

Eléments de solution du problème du § I

A

$\varphi(a) = f(a) - a$ et $a \le f(a) \le b$ donc $\varphi(a) \ge 0$

$\varphi(a) = f(a) - a$ et $a \le f(a) \le b$ donc $\varphi(a) \ge 0 \varphi(b) = f(b) - b$ donc $\varphi(b) \le 0$

φ est continue sur [a,b] , le théorème des valeurs intermédiaires assure que $0 \in [\varphi(b), \varphi(a)]$ admet au moins un antécédent α par φ dans [a,b) .Donc il existe au moins un réel $\alpha \in [a, b]$ tel que : $\varphi(\alpha) = 0$, soit $f(\alpha) = \alpha$.

B f est croissante sur [a,b] a)$u_0 \in I$, $p \in N$, $u_p \in I$, $f(u_p) \in f(I)$; donc $u_{p+1} \in I$.

b)$u_1 \ge u_0$, p fixé , $u_p \ge u_{p-1}$, f croissante , $f(u_p) \ge f(u_{p-1})$, donc $u_{p+1} \ge u_p$

$u_1 \ge u_0$, p fixé , $u_p \ge u_{p-1}$, f croissante , $f(u_p) \ge f(u_{p-1})$, donc $u_{p+1} \ge u_p$; ainsi par récurrence , (u_n) est croissante et majorée par b , puisque tous les $u_n \in I$. Elle converge vers un réel ℓ de l'intervalle I . Soit la suite (u_n) et son image par f , elles ne diffèrent que par le premier terme ; la seconde converge aussi vers ℓ . La fonction f est continue , par composition des limites : $\ell = f(\ell)$. c) idem

C f est décroissante sur [a,b]

1°) Soit

:$x' < x'' \Rightarrow f(x'') \le f(x') \Rightarrow f \circ f(x') \le f \circ f(x'')$

$x' < x'' \Rightarrow f(x'') \le f(x') \Rightarrow f \circ f(x') \le f \circ f(x'')$; ainsi $f \circ f$ est croissante sur I .

2°) Les hypothèses du lemme étant réalisées , f admet au moins un point fixe $\alpha \in I$.
Supposons $\alpha < \beta$ et β un autre point fixe ; alors , f décroissante donc
$f(\alpha) \geq f(\beta)$; soit $\alpha \geq \beta$,ce qui est impossible . Le point fixe est donc unique .
3°) a) f(I)⊂I , donc $\forall n \in N, u_n \in I$. b) Soit la suite extraite (u_{2n}) ,considérer $f \circ f$ et voir B,c ;alors cette suite croissante et majorée converge vers $\ell < \alpha$. La démonstration est analogue pour la suite (u_{2n+1}) qui converge vers ℓ' . On a : $\forall n \in N, u_{2n} \leq l \leq \alpha \leq l' \leq u_{2n+1}$ (i). c) c'est identique quant aux moyens , on a

$$u_{2n+1} \leq l' \leq \alpha \leq l \leq u_{2n} \quad \text{(ii)}$$

4°) Dans les hypothèses de la 3° question , si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont la même limite α , elles sont nécessairement adjacentes . L'hypothèse manquante est donc : $\lim\limits_{n \to \infty}(u_{2n+1} - u_{2n}) = 0$.

D rapidité de convergence

1°) a) voir le lemme

b) si f admet deux points fixes sur I ,l'inégalité des accroissement finis donne : $|f(\alpha) - f(\beta)| \leq k|\alpha - \beta| < |\alpha - \beta|$, car $k \in]0,1[$; donc $|\alpha - \beta| < |\alpha - \beta|$, ce qui est impossible ,d'ou l'unicité. 2°) solution classique. 3°) la suite géométrique (k^n)converge d'autant plus vite que k est proche de 0 . Pour nous , c'est le majorant de $|f'(x)|$ pour $x \in [a, b]$, qui assure une plus ou moins grande rapidité de convergence . Il n'est pas question en terminale d'évoquer$|f'(\alpha)|$.