

**STRUCTURER L'ESPACE
PAR
L'ETUDE DES REGULARITES**

2° partie

**JACQUES HADAMARD
ET
LES POLYEDRES REGULIERS.**

In

Leçons de géométrie élémentaire ; II géométrie dans l'espace " par Jacques HADAMARD (1901), **réédité chez Jacques Gabay en 1988.**

**COMMENTAIRE DU TEXTE ACCOMPAGNE
DE FIGURES GEOSPACW**

Jean-Pierre Daubelcour
IREM de LILLE

14/04/2003

POLYEDRES

Préambule

Ce travail s'inscrit dans le cadre d'une étude historique des concepts de géométrie dans l'espace d'Euclide à nos jours (concept d'égalité, d'orientation, d'espace etc...) destinée à une liaison "terminale-post bac". Les Polyèdres, par les régularités qu'on peut leur imposer, tiennent une place de choix. Dans cette première partie, l'objectif est réduit à l'études des polyèdres réguliers. A cette fin, nous commentons l'œuvre de Jacques Hadamard sur les polyèdres jusqu'au théorème d'Euler et la construction des solides de Platon, en l'accompagnant de nombreuses figures exécutées avec le logiciel GéospaceW.

L'originalité d'Hadamard¹ consiste à démontrer certaines propriétés des polyèdres en utilisant les polygones correspondant sur une sphère. Son ouvrage se caractérise également par sa relative simplicité, à la fois dans la méthode suivie et les démonstrations. Le vocabulaire utilisé par Hadamard est assez proche, en géométrie dans l'espace, de celui que nous utilisons actuellement.

Compte tenu des objectifs visés, il ne s'agit pas d'un commentaire exhaustive des chapitres portant sur les polyèdres. Cependant nous respectons l'ordre et les méthodes suivis par Hadamard en 1902 : les définitions et des théorèmes² sont reconduits exactement, de même que les notations³ utilisées par l'auteur. Pour éviter toute ambiguïté, les textes originaux d'Hadamard que l'on retrouve dans son ouvrage, figurent en *italique* dans le développement qui suit. Enfin la variété et le grand nombre de figures, répondent à une volonté d'améliorer la vision dans l'espace et la compréhension des démonstrations en utilisant ici un logiciel très simple : GéospacW⁴.

¹ L'ouvrage "Géométrie" Tome 2 de Marcel Berger, publié chez Nathan en 1990 traite des polyèdres mais son discours ne peut se situer dans le cadre d'une liaison " terminale-post bac". Outre le fait qu'il travaille dans des espaces affines de dimensions n , il utilise des outils très élaborés comme la topologie, l'algèbre linéaire, l'intégrale de Lebesgue.. etc

² Ils sont numérotés ici dans chacune des six parties pour des raisons de lisibilité.

³ Par exemple : Angle plan ou rectiligne d'un dièdre ; arc mineur et majeur sur un grand cercle

⁴ Je renvoie à un apprentissage nécessaire mais aisé de GéospacW pour la réalisation des figures. En annexes, à titre d'exemple, je donne le texte fourni par le logiciel pour quelques figures.

Ce logiciel, construit par une équipe d'enseignants du CREEM¹ a un intérêt pédagogique remarquable et conjugue simplicité et performance. Nous sommes loin, ici, des logiciels "conviviaux" qui présentent la possibilité de faire des figures sans guère solliciter l'initiative du "dessinateur" ; lequel n'est qu'un exécutant. Ceci peut se comprendre dans le cadre d'une utilisation professionnelle mais pas dans celui d'un apprentissage de la géométrie. Avec géospacW, la figure est construite par l'utilisateur en passant par des étapes obligées. Il ne peut réaliser ces étapes sans connaître les propriétés des droites, plans, sphères et cercles de l'espace. Prenons par exemple la construction d'un "arc mineur" AB de grand cercle d'une sphère de centre S. Le "dessinateur" doit d'abord créer le plan SAB, puis la droite d orthogonale à SAB en S, ensuite il choisit un point u sur d, et considérant l'axe orienté (Su[, il peut enfin tracer l'arc mineur AB défini par son grand cercle et le sens de l'arc autour de (Su[. Pour préciser le mode de fonctionnement de GéospacW, je donne en annexe "le texte géospacw" correspondant à une figure réalisée dans ce travail.

Enfin j'ai divisé cette étude en six parties qui correspondent à l'avancement du savoir nécessaire aux objectifs finaux : le théorème d' Euler et les solides de Platon.

Sommaire²

1° PARTIE : (Chap V. Livre V) . Angles dièdres- plans perpendiculaires.(page5)

I Définitions des dièdres et orientation

- §1 Dièdres de l'espace
- §2 Sens d'un angle dièdre
- §3 Dièdres égaux et adjacents

II Plans perpendiculaires

2° PARTIE : (Chap VI. Livre V) . Premières notions de géométrie sphérique
I généralités sur la sphère

- §1 Rappel
- §2 Angle de deux grands cercles

3° PARTIE : (Chap VII. Livre V) . Angles polyèdres – Polygones sphériques
I Généralités : polyèdres et polygones sphériques

¹ Dans le cadre plus général du CNAM

² L'ouvrage d'Hadamard " Géométrie dans l'espace" est divisé en livres V , VI, VII, VIII, IX et X , suivi de "Compléments de géométrie dans l'espace.

§1 Définition d'un angle polyèdre

§ 2 Polygones sphériques

II Relations entre Polygones sphériques et polyèdres.

III Trièdres supplémentaires et triangles polaires.

IV Cas d'égalités des trièdres(resp. des triangles sphériques)

4° PARTIE : (ChapI . Livre VI) : Notions générales sur les polyèdres

I Définitions

II Classification

COMPLEMENTS DE GEOMETRIE DANS L'ESPACE

5° PARTIE : (Chap IV.) Aires des Polygones sphériques

I Aire du Fuseau sphérique

II Aire d'un triangle sphérique

6°PARTIE : (Chap V.) Théorème d'Euler. Polyèdres réguliers

I Limitations imposées au polyèdres.

II Section d'une surface polyédrale.

III Surface(ou aire) simplement connexe

IV Théorème d'Euler

IV Bis Angles Polyèdres et Rotations

V polyèdres réguliers

VI Rotations et symétries d'un polyèdre régulier

VII Exemple : Rotations et symétries du cube

VIII Exemples Rotations et symétries d'un tétraèdre

régulier

IX Polyèdres réguliers réciproques(ou duals)

X Les solides de Platon

XI Construction d'un dodécaèdre régulier

A. Principe

B. Réalisation avec le logiciel Géospacw

C. Le dual : l' icosaèdre régulier

D. Calculs des dimensions des polyèdres régulier

Annexe I . Texte d'une figure géospacw

Annexe II " Construction du dodécaèdre régulier par Euclide"

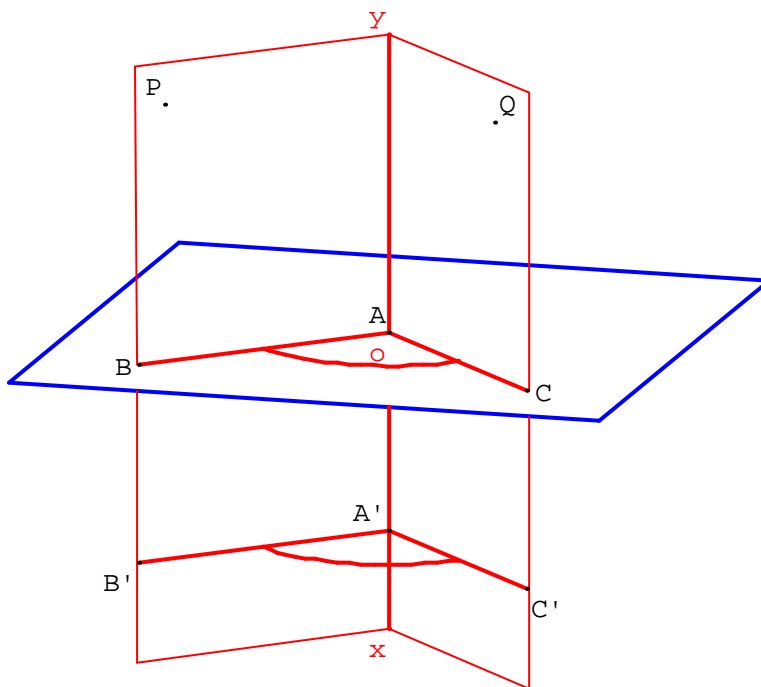
1° PARTIE : Angles dièdres- plans perpendiculaires. (Chapitre IV Livre V) .

I Définitions des dièdres et orientations de l'espace

§1 Dièdres de l'espace

Définition1 . On appelle angle dièdre la figure formée par deux demi-plans limités par une droite commune, appelée l'arête du dièdre ; les deux demi-plans sont appelés les faces. Les demi-plans P et Q sont ici (cf FIG1) les faces et la droite xy l'arête du dièdre. On notera celui-ci (selon Hadamart) : PQ ou $P.\vec{xy}.Q$

FIG1



Définition2 . On appelle angle plan ou rectiligne d'un angle dièdre, l'angle rectiligne \widehat{BAC} obtenu en coupant le dièdre par un plan perpendiculaire. Il est aisé de montrer que la grandeur de l'angle plan ainsi obtenu ne dépend pas du plan sécant, mais uniquement du dièdre considéré. (cf FIG 1)

§ 2 Sens d'un angle dièdre ¹(cf FIG 2)

Sens de rotation d'un angle plan \widehat{BAC} . Le plan (BAC) partage l'espace en deux régions R et R'. On convient de choisir une de ces régions, R pour regarder le plan BAC. Si par le point A on élève une perpendiculaire d au plan, la fixation de la région R revient au choix d'un sens sur cette perpendiculaire (marqué par une flèche sur la FIG 2). Nous plaçons un observateur dans la région R suivant la droite d de manière que le sens ainsi fixé soit celui qui va des pieds à la tête.

¹ En fait, J Hadamart réalise à cette occasion, sans pour autant la mettre en forme, une orientation de l'espace en orientant les dièdres.

Définition 3. "Si regardant l'intérieur de l'angle \widehat{BAC} , cet observateur voit le côté AB à droite de AC , l'angle est dit "de sens direct". Il est rétrograde dans le cas contraire"¹

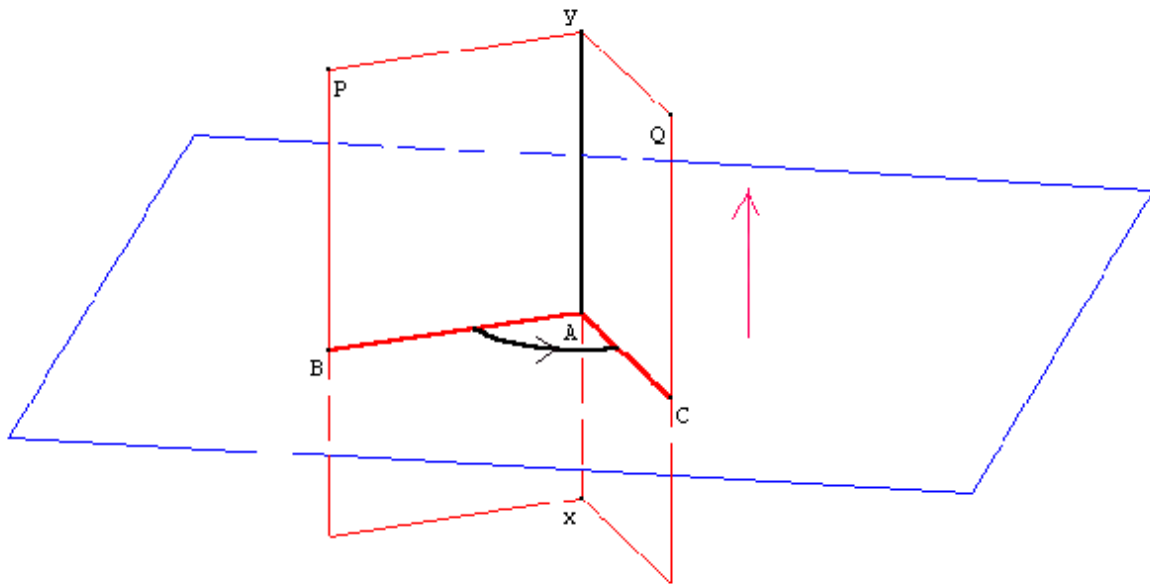


FIG 2

- Le sens de rotation de l'angle change si l'on change le sens sur la perpendiculaire d au plan BAC
- Le sens de rotation de l'angle change si l'on énonce les côtés dans l'ordre inverse : \widehat{BAC} et \widehat{CAB} sont de sens opposés.

Définition 4. Sens d'un dièdre. Soit un dièdre PQ , appliquons ceci à l'angle \widehat{BAC} de ce dièdre (cf FIG2). La droite d perpendiculaire au plan BAC n'est autre que l'arête xy du dièdre. Supposons fixé un sens sur (xy) celui du vecteur \vec{Ay} et plaçons un observateur selon (xy) de façon que le sens en question soit celui qui va de ses pieds à sa tête, et regardant l'intérieur du dièdre. Celui-ci sera "direct" si cet observateur voit le côté AB à droite de AC .

§3 Dièdres égaux et adjacents

Deux dièdres sont "égaux" (conformément à la définition des figures égales) si on peut les transporter l'un sur l'autre de façon à les faire coïncider.

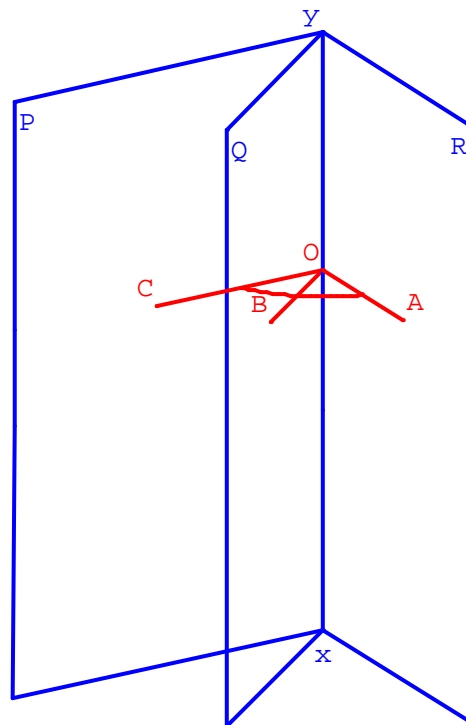
Deux dièdres "adjacents ayant même arêtes" permettent de définir la somme de deux dièdres et de comparer deux dièdres. (cf FIG 3). Ainsi pour faire la somme de deux dièdres

On les transporte l'un à côté de l'autre de façon à les rendre adjacents. Hadamard démontre le théorème suivant qui légitime les définitions de la somme et de la comparaison de deux dièdres. Nous ne rapportons pas cette démonstration ici.

Théorème 1. Deux dièdres égaux ont des rectilignes égaux; deux dièdres inégaux ont des rectilignes inégaux, et au plus grand dièdre correspond le plus grand rectiligne. A un dièdre somme (ou différence) de deux autres, correspond un rectiligne somme (ou différence) des deux rectilignes primitifs.

¹ IL s'agit là de "la règle du bonhomme d'Ampère" dans notre vocabulaire usuel.

FIG3



II Plans perpendiculaires

Définition 5. On dit qu'un plan est perpendiculaire sur un autre, lorsqu'il forme avec cet autre, deux dièdres adjacents

Un dièdre est dit droit lorsqu'une de ses faces est perpendiculaire sur l'autre.

Théorème 2. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un dièdre soit droit est que son angle plan soit droit

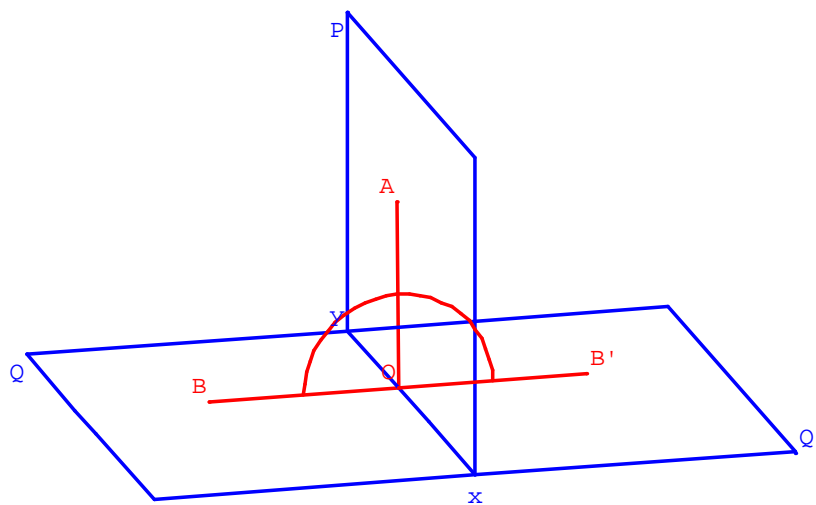


FIG4

Citons, sans être exhaustif ici, les énoncés qu'en déduit Hadamart :

Corollaire. Si un plan est perpendiculaire à un autre, inversement celui-ci est perpendiculaire au premier.

Théorème3. Quand deux plans sont perpendiculaires, toute perpendiculaire à leur intersection, menée dans l'un d'eux, est perpendiculaire à l'autre.

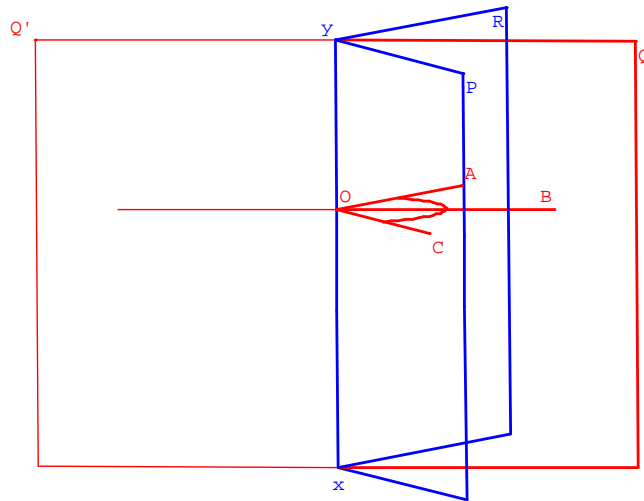
1° Réciproque. Un plan est perpendiculaire à un autre, s'il contient une droite perpendiculaire à cet autre

2° Réciproque. Si deux plans sont perpendiculaires, et que l'un d'un point de l'un on abaisse une perpendiculaire sur l'autre, celle-ci est située toute entière dans le premier plan.

Ecourtons ces énoncés usuels pour terminer par la notion de plan bissecteur d'un dièdre

Définition6. On nomme plan bissecteur d'un dièdre, le plan qui divise le dièdre en deux parties égales . Ce plan peut être formé par l'arête du dièdre et la bissectrice d'un angle plan.

FIG 5



2° PARTIE : Premières Notions de géométrie sphérique. (Chapitre VI Livre V)

I Généralités sur la sphère

§ 1 Rappels

Je ne reprends pas la définition d'une sphère, ni la position relative d'une droite, d'un plan et d'une sphère. De même les notions de "grand cercle", de plan tangent en un point à une sphère sont supposé connus. Deux grands cercles se coupent selon des points diamétralement opposés. On sait aussi que par deux points distincts de la sphère, non diamétralement opposés, il passe un grand cercle et un seul.

Rappelons qu'une sphère de rayon R et un plan P situé à une distance d du centre se coupent (si $d \leq R$) suivant un cercle dont le rayon r vérifie : $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. Voir sur la figure 6 le

triangle rectangle SCM. Les points distincts A et B d'un grand cercle non diamétralement opposés, le divise en deux arcs : *l'arc mineur* qui est plus petit qu'un demi-cercle, et *l'arc majeur*, plus grand qu'un demi-cercle. Systématiquement dans la suite nous désignerons par

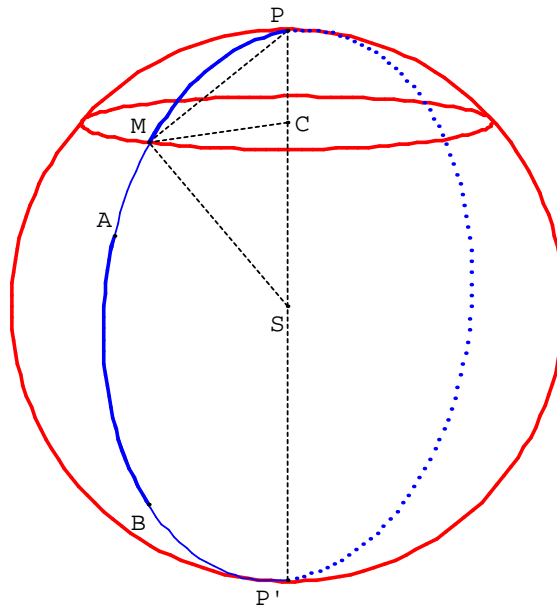


FIG 6

"arc AB" l'arc mineur, (en bleu trait épais FIG6)lorsqu'il existe.

Le diamètre perpendiculaire au plan d'un cercle (c) de la sphère (ci-dessus le cercle de centre C et de rayon r) coupe la sphère en deux points diamétralement opposés P et P' appelés

" pôles "du cercle (c). Chacun des pôles de (c) , soit P ou P', est équidistant de tous les points du cercle (c) : la distance PM (respectivement P'M) reste constante lorsque M décrit (c). Réciproquement le lieu des points de la sphère situés à une distance constante(< 2R) d'un point P de la sphère est un cercle (c) de cette sphère ayant ce point pour pôle. Si cette distance est $R\sqrt{2}$, le cercle (c) est un grand cercle. De même l'arc du grand cercle PM a également *même grandeur*, quel que soit le point M sur le cercle (c) : on lui donne le nom de *rayon sphérique* du cercle (c). Le rayon sphérique d'un grand cercle est $\frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2}$, et

inversement. Enfin un cercle (c) quelconque de la sphère divise celle-ci en deux régions dites "*calottes sphériques*", situées de part et d'autre du plan de ce cercle. Chacune de ces "*calottes*" contient un pôle de ce cercle. Si (c) est un "petit" cercle, on donne le nom de "*région intérieure*" à ce petit cercle à la plus petite des deux calottes, celle dont le rayon sphérique est inférieur à un quadrant ($\frac{\pi}{2}R$).

§2 Angle de deux grands cercles

Théorème1 . *L'angle de deux demi-grands cercles, terminés à leur diamètre commun, est égal à l'angle des demi-plans qui les contiennent. Il a pour mesure l'arc intercepté, entre eux, sur le grand cercle qui a pour pôles leurs points communs.*

Soient les demi-grands cercles AMA' et ANA' de la sphère de centre S qui se coupent en A et A' . Soient Ax et Ay les tangentes à ces courbes au point A . Ces tangentes étant toutes deux

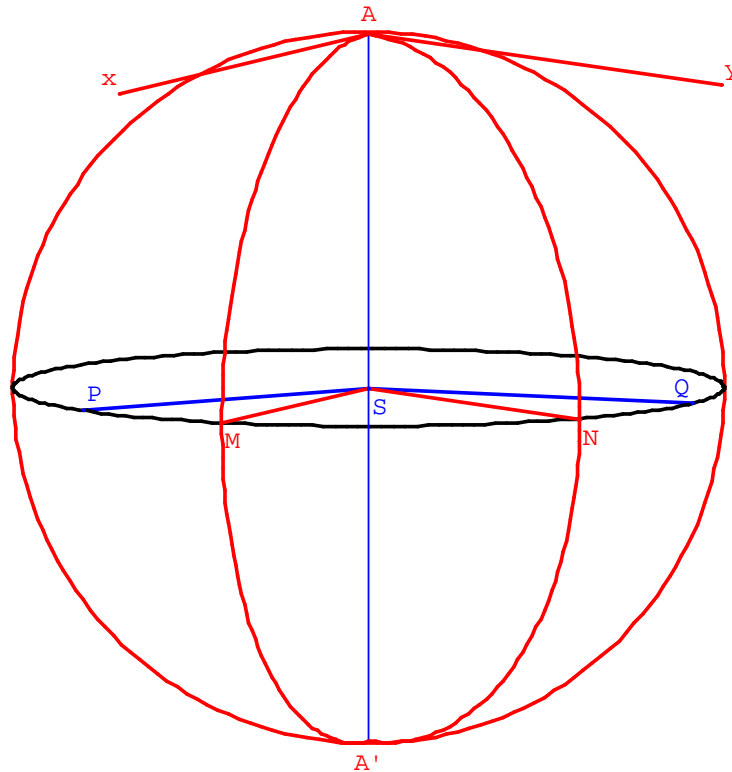
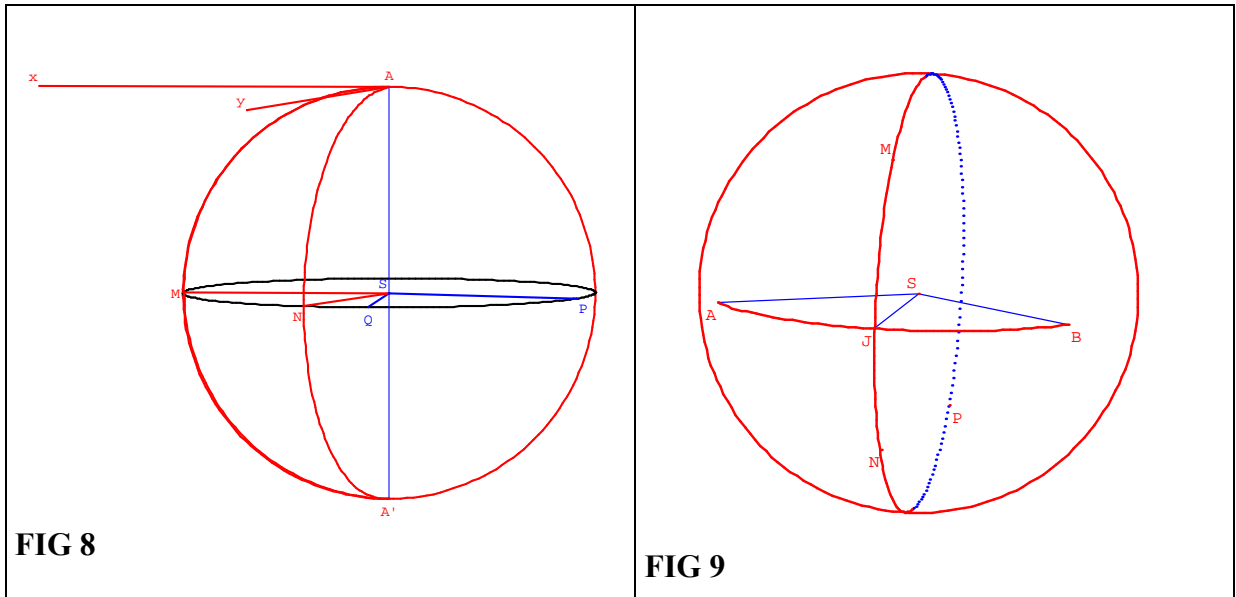


FIG 7

perpendiculaires à AA' , déterminent l'angle plan (le rectiligne) du dièdre $M.AA'.N$. D'autre part le grand cercle qui a pour pôles A et A' (l'équateur ici sur l FIG 7) a son plan p perpendiculaire à (AA') . Ce plan coupe les demi-plans $AA'M$ et $AA'N$ selon les droites (SM) et (SN) qui forment entre elles l'angle plat du dièdre $M.AA'.N$. Cet angle est aussi l'angle au centre correspondant à l'arc de grand cercle MN .

Théorème2. L'angle de deux demi-grands cercles est mesuré par l'arc de grand cercle qui joint leurs pôles, ou par son supplément.

Ce plan p (MSN) perpendiculaire aux deux plans AMA' et ANA' contient les pôles P, P' et Q, Q' des grands cercles (AMA') et (ANA') car les diamètres PP' et QQ' respectivement perpendiculaires aux plans AMA' et ANA' sont tous deux perpendiculaires à leur intersection (AA') . Dans ce plan p les droites PP' et QQ' sont respectivement perpendiculaires aux rayons SM et SN de la sphère : donc leur angle est égal à MSN ou à son supplément. Sur la figure 7 ci-dessus, les arcs égaux MP et NQ sont de sens opposés (On suppose l'espace orienté comme il est dit au Chapitre V) ; dans ce cas les angles PQS et MSN sont supplémentaires. Par contre si les arcs égaux MP et NQ sont de même sens les angles précédents sont égaux (cf FIG 8).



Théorème3. *Le lieu des points d'une sphère également distants de deux points donnés de cette surface est le grand cercle perpendiculaire au milieu de celui qui joint les deux points donnés (FIG 9)*

Ce lieu est inclus dans le plan médiateur q du segment $[AB]$, lequel passe par S , le centre de la sphère ($SA = SB = R$, rayon). C' est donc sur l'intersection de la sphère s et du plan q : c'est un grand cercle de la sphère. Ce grand cercle passe par J le milieu de l'arc de grand cercle AB : car cordes $JA = JB$ donc les arcs de grand cercle JA et JB sont égaux. Les plans des arcs AB et du grand cercle sont perpendiculaires, car la droite (AB) est perpendiculaire au plan médiateur q .

Problème Trouver le rayon d'une sphère solide, à l'aide de constructions effectués sur la surface et de constructions planes

La solution peut s'inspirer de la construction de la médiatrice d'un segment. Deux points A et B étant choisis sur la sphère, non diamétralement opposés, à l'aide d'un compas on trace sur la sphère deux cercles de centre A et B , ils se coupent en M . En répétant cette construction deux fois, on obtient deux autres points N et P (FIG 9); ces trois points M , N et P appartiennent au grand cercle précédent (dans le plan médiateur du segment AB).

Relevons alors au compas les distances MN , NP et PM , on peut construire, sur un plan un triangle $M'N'P'$ égal au triangle MNP . Le rayon du cercle circonscrit à $M'N'P'$ est le rayon de la sphère s .

3° PARTIE : ANGLES POLYEDRES – POLYGONES SHERIQUES (Chap VII Livre V)

Comme annoncé, dans ce chapitre J. Hadamard établit des propriétés sur les angles polyèdres en utilisant les propriétés des polygones sphériques correspondants sur la sphère.

Ce commentaire du Chapitre VII est non exhaustif, je traite en priorité les résultats qu' Hadamard utilisera ultérieurement pour le théorème d' EULER et les SOLIDES de PLATON.

I Generalités : polyèdres et polygones sphériques

§ 1 Définition d'un angle polyèdre

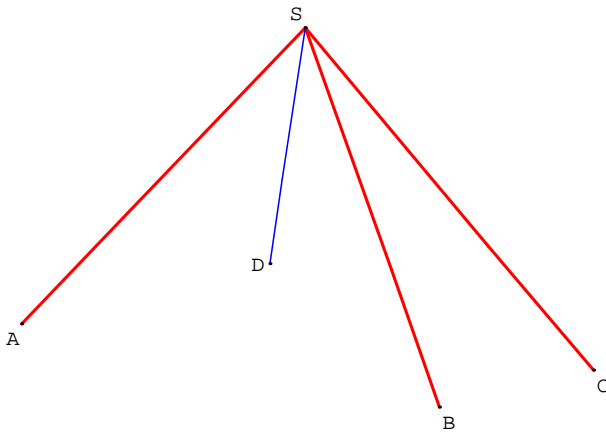


FIG 1

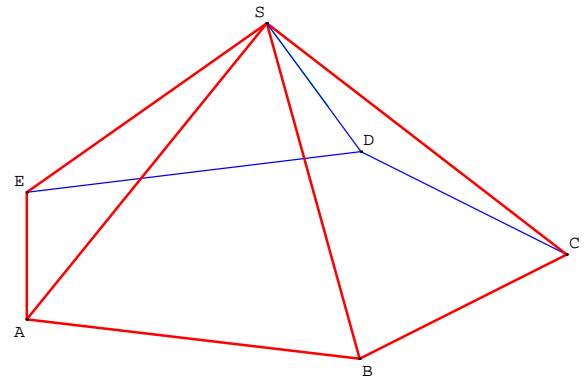


FIG2

Définition1. On appelle angle polyèdre la figure formée par plusieurs plans passant par un même point (S sommet de l'angle polyèdre) et limités à leurs intersections successives (lesquelles sont des demi-droites appelées "arêtes" de l'angle polyèdre) de manière à enfermer une portion d'espace indéfinie dans un sens. (FIG 1)

On distingue dans un angle polyèdre : les arêtes (ici les demi-droites SA, SB, SC et SD) ; les faces qui sont les angles compris entre deux arêtes consécutives ; les dièdres compris entre deux faces consécutives et qui ont pour arêtes les arêtes de l'angle polyèdres. Les angles polyèdres les plus simples sont les trièdres avec trois faces et trois arêtes. *Un angle polyèdre est dit convexe, s'il est tout entier d'un même côté par rapport au plan d'une quelconque de ses faces, prolongé indéfiniment, comme il arrive pour un angle polyèdre dont les arêtes passent par les sommets d'un polygone convexe (cf FIG2). Il est dit concave dans le cas contraire.* Les trièdres sont nécessairement convexes.

§2 Polygones sphériques

Définition2. Un polygone sphérique est une portion de sphère limitée par des arcs de grands cercles (appelés côtés du polygone), plus petits qu'une demi-circonférence, limités à leurs intersections respectives.

FIG 3

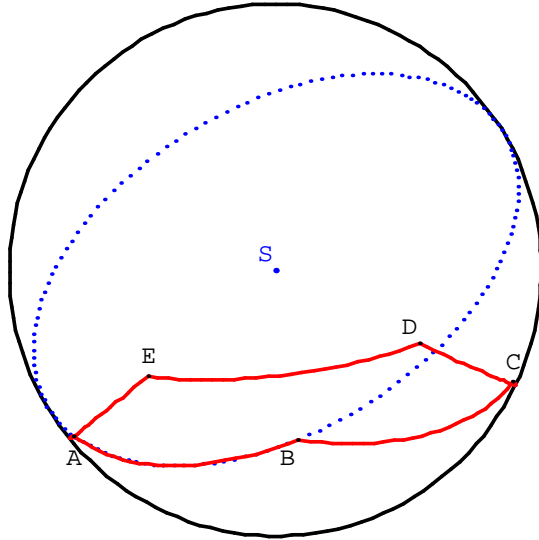
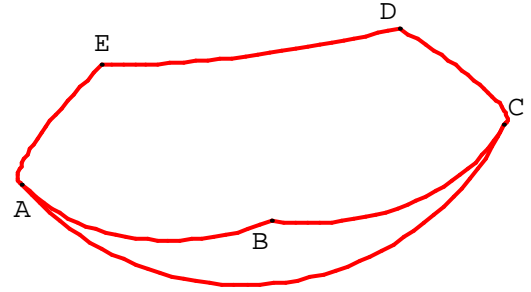


FIG 4



Un polygone sphérique est dit convexe lorsqu'il est situé d'un seul côté par rapport à chacun des grands cercles sur lesquels sont ses côtés (cf FIG 4). Il est concave dans le cas contraire. Dans le cas " convexe", chaque grand cercle contenant un côté (celui de AB sur la

figure 3) partage la sphère en deux hémisphères et le polygone est entièrement situé dans l'un des deux.

L'intérieur du polygone sphérique concave est la région intersection de tous les hémisphères correspondant à chaque côté. Si M et N sont deux points intérieurs au polygone alors l'arc mineur MN est "intérieur" au polygone. Tout triangle sphérique est nécessairement convexe.

II Relations entre les polygones sphériques et les angles polyèdres.

Soit un polygone sphérique sur une sphère de sommet S , il lui correspond un angle polyèdre dont les arêtes sont les demi-droites joignant S au sommets du polygone.

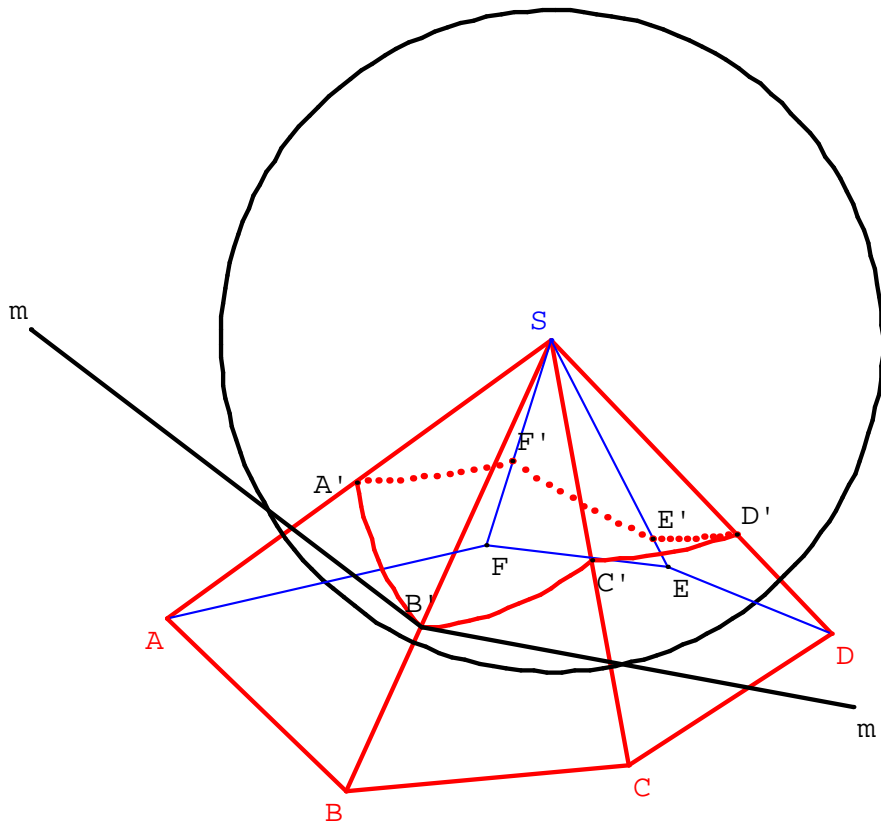
Propriété 1 : Les faces \widehat{ASB} et \widehat{BSC} ... de cet angle polyèdre sont les angles au centre correspondant au " côtés" AB, BC ... du polygone sphérique.

Propriété 2 : Les rectilignes des dièdres de l'angle polyèdre sont respectivement égaux aux angles du polygone sphérique correspondant.

Démonstration (cf FIG5). La propriété 1 est évidente.

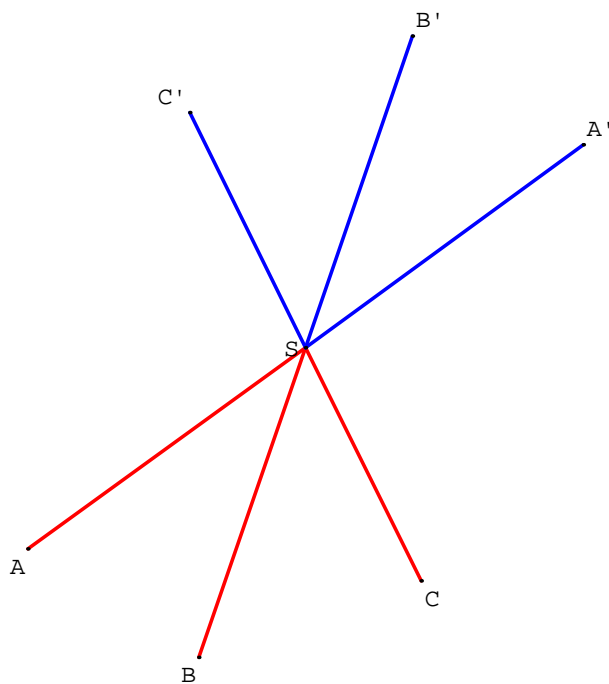
Soit le dièdre $A.SB.C$ et le polyèdre sphérique $p = A'B'C'D'E'F'$ (FIG 5). Par définition, l'angle au sommet B' de p est l'angle mBm' où B'm est tangente en B' au grand cercle de centre S et contenant A'B' et Bm tangente en B' au grand cercle contenant B'C'. Ainsi la droite B'm est perpendiculaire en B' au rayon SB' et contenue dans le plan SB'A' du grand cercle. De même De même B'm la tangente au grand cercle passant par B'et C' est orthogonale à SB' et située dans le plan C'SB'. Par suite mBm' est le rectiligne du dièdre $A.SB.C$.

FIG 5



Inversement tout angle polyèdre ayant pour sommet le centre S d'une sphère coupe celle-ci suivant un polygone sphérique possédant les propriétés 1 et 2. Le polygone sphérique et l'angle polyèdre correspondant seront tous deux concaves(respectivement convexes).

§ 1 Trièdres symétriques ; *disposition* d'un trièdre, d'un polyèdre.



La symétrie centrale de centre S transforme le trièdre SABC en SA'B'C'. Tous les éléments correspondant sont égaux, (faces respectivement égales comme angles opposés par le sommet ; les rectilignes des dièdres correspondant comme angles à côtés parallèles deux à deux) . Cependant ces deux *trièdres ne sont pas égaux* : on ne peut en effet les superposer. Si SA' vient coïncider sur SA, SC' sur SC en les "déplaçant" dans le plan SA'C' pris comme plan du tableau (par un demi-tour dont l'axe est perpendiculaire au plan SA'C').

FIG 6

Si l'arête SB' est derrière le plan du tableau, elle y restera nécessairement dans le mouvement que nous imprimons au trièdre $SA'B'C'$ puisque que la face $SA'C'$ se déplace sans quitter le plan du tableau et par conséquent l'arête SB' ne saurait le traverser. Il est impossible que SB' coïncide avec SB . Plus généralement si deux trièdres ont leurs éléments respectivement égaux et qu'ils ne peuvent coïncider, on dira que *leur disposition n'est pas la même*.

Définition3. On nomme disposition d'un trièdre $SABC$ le sens du dièdre $B.SA.C$ (1° Partie I §2) lorsque qu'on prends comme première face de ce dièdre SAB et le sens choisi sur l'arête est le sens de SA .

Le disposition du trièdre sera dite "*directe*" si un observateur placé suivant SA , les pieds du côté de S et regardant l'intérieur du trièdre, voit la face SAB à droite de la face SAC ; il sera "*rétrograde*" dans le cas contraire. La disposition d'un trièdre dépend de l'ordre dans lequel on nomme les arêtes.

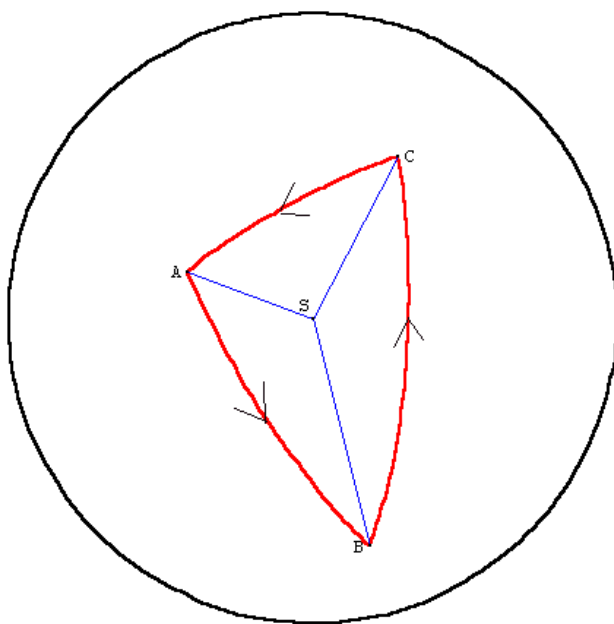
La notion de disposition s'applique à tout angle polyèdre : $SABCDE$ sera dit *direct* si un observateur placé selon SA , les pieds du côté de S et regardant l'intérieur du polyèdre voit la face SAB à droite de la Face SAE , ; *rétrograde* dans le cas contraire

Dans la démonstration précédente le dièdre $S A'B'C'$ est $SABC$ n'ont pas la même disposition ils sont de disposition inverse : on dira qu'ils sont *symétriques*.

Définition4. On appelle trièdres *symétriques*, deux trièdres quelconques ayant tous leurs éléments correspondant égaux mais avec une disposition inverse.

De même on aura à considérer la disposition d'un triangle ou d'un polygone sphérique. On appellera ainsi le sens d'un de ses angles, supposé vu de l'extérieur de la sphère. Il est clair que cette disposition est la même que celle de l'angle polyèdre correspondant : en effet l'angle du polygone sphérique est égal au dièdre du polyèdre correspondants (propriété 2 ; cf Fig5)

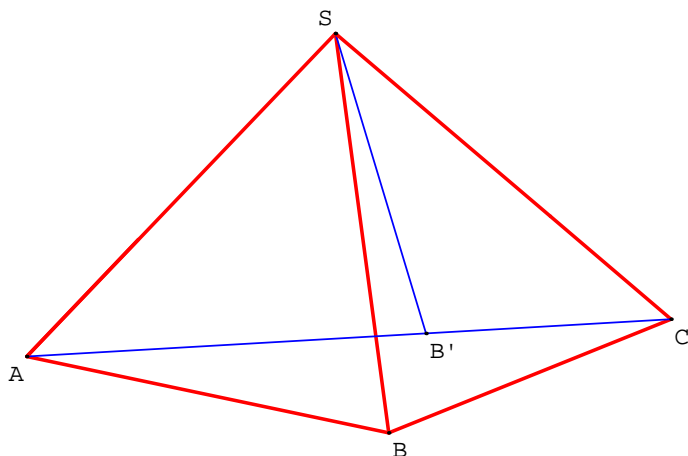
FIG 7



La disposition d'un triangle sphérique dépend de l'ordre de ses sommets Sur la FIG 7 ci-contre le triangle ABC est directe si un observateur regardant la sphère de l'extérieur et cheminant le long du côté AB de A vers B , voit l'intérieur du triangle à sa gauche. Sous cette forme (qui s'applique à tout polygone sphérique), on voit qu'il s'agit d'une propriété relative à un sens de parcours du périmètre. Elle ne change pas par permutation circulaire des sommets.

Théorème1. Dans tout trièdre, une face quelconque est moindre que la somme des deux autres et plus grande que leur différence

FIG 8



$\hat{A}SC < \hat{A}SB + \hat{B}SC$ est évidente si $\hat{A}SC < \hat{A}SB$. Sinon démontrons la seconde partie de l'énoncé, la première en découle. Dans le plan ABC soit B' sur le segment AC tel que $\hat{A}SB' = \hat{A}SB$: $\hat{B}SC$ représente alors la différence $\hat{A}SC - \hat{A}SB$.
Construisons la figure telle que $SB = SB'$ et traçons par B et B' un plan qui coupe les deux arêtes en A et C. Les deux triangles ASB et ASB' sont alors égaux. Alors $AB' = AB$, et $B'C = AC - AB$ donc $B'C < BC$ (dans le triangle ABC un côté est supérieur à la différence des deux autres).

Comparons les triangles BSC et CSB' ayant deux côtés égaux et le troisième inégal ($B'C < BC$), donc $\hat{B}'SC < \hat{B}SC$, donc $\hat{A}SC - \hat{A}SB < \hat{B}SC$.

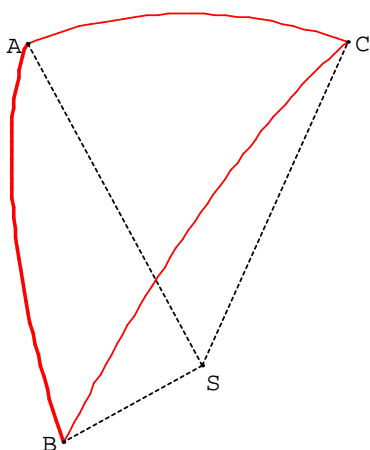
Corollaire1. Dans tout polyèdre, une face quelconque est plus petite que la somme des autres

La démonstration s'inspire de la précédente.

Les faces du polyèdre étant égales aux côtés correspondant du polygone sphérique : il vient

Corollaire2 Un côté quelconque d'un polygone sphérique est plus petit que la somme des autres (donc un côté quelconque d'un triangle sphérique est plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence)

FIG 9



Il en résulte, comme en géométrie plane, que l'arc mineur qui joint deux point A et B (cf FIG9) est plus court que toute ligne polygonale terminée aux mêmes extrémités. On dira que cette arc mineur AB mesure la distance sphérique des point A et B.
Comme deux trièdres, deux triangles sphériques dont les éléments respectifs sont égaux, mais qui diffèrent par leur disposition sont symétriques. C'est le cas de deux triangles sphériques dont les sommets sont diamétralement opposés deux à deux.

Remarque . L'originalité de la méthode de J. Hadamard réside comme ci-dessus à raisonner soit sur les angles polyèdres, soit sur les polygones sphériques correspondants. Dans la suite il va se réduire à une étude sur la sphère (où les figures sont plus claires) pour en déduire de

¹ Nous retrouvons ce qu'on appelle couramment la règle du bonhomme d' Ampère.

propriétés sur les polyèdres. C'est pourquoi chaque page de son ouvrage est ici partagée en deux colonnes : pour les polyèdres et les polygones sphériques.

<p>Théorème.2 Quand un angle polyèdre convexe est intérieur à un angle polyèdre quelconque de même sommet (une ou plusieurs arêtes ou faces pouvant être communes), la somme des faces de l'angle polyèdre enveloppé est plus petite que la somme des faces de l'angle polyèdre enveloppant.</p> <p>Théorème3. La somme des faces d'un polyèdre convexe est plus petite que quatre droits</p>	<p>Théorème.2bis. Quand un polygone sphérique convexe est intérieur à un polygone sphérique quelconque (un ou plusieurs sommets ou côtés pouvant être communs), le périmètre du polygone enveloppé est inférieur à celui du polygone enveloppant.</p>
<p>Ici le polyèdre enveloppant se réduit, par exemple, aux deux demi-plans qui constituent les faces d'un de ses dièdres. Ainsi pour un trièdre $SABC$ (cf FIG 10) soit SA' le prolongement de SA; alors $SA'BC$ est un nouveau trièdre dans lequel $\widehat{BSC} < \widehat{BSA}' + \widehat{ASC}$.</p> <p>Or $\widehat{BSA}' = 2\text{Droits} - \widehat{BSA}$ et $\widehat{ASC} = 2\text{Droits} - \widehat{BSA}' = 2\text{Droits} - (2\text{Droits} - \widehat{BSA})$. Par suite, $\widehat{BSC} < 4\text{D} - (\widehat{BSA} + \widehat{ASC})$; donc $\widehat{BSC} + \widehat{ASC} + \widehat{BSA} < 4\text{droits}$.</p>	<p>La démonstration de ce théorème est exactement la même que dans le plan : cette fois la distance AC sur la sphère étant, comme définie ci-dessus, la mesure de l'arc mineur du grand cercle passant par A et C. Ainsi le point C est intérieur au polygone sphérique enveloppant, donc $AC < AG$ (cf FIG 11); donc a fortiori $AC < AC' + CG$. De proche en proche le résultat est atteint.</p>
<p>Cette démonstration sur la sphère revient à comparer le périmètre du triangle sphérique ABG à celle nécessairement plus grande des deux demi-grands cercles ABF et AGF. Le cas général d'un polyèdre avec un nombre quelconque de faces se ramène de proche en proche au cas du trièdre.</p>	<p>Cette démonstration reste vraie lorsque le polygone enveloppant est remplacé par deux demi-grands cercles ABF et AEF : le polygone $P = ABFEA$ (cf FIG 12). D'où le Théorème3Bis. Le périmètre de tout polygone sphérique est inférieur à la circonférence d'un grand cercle.</p>

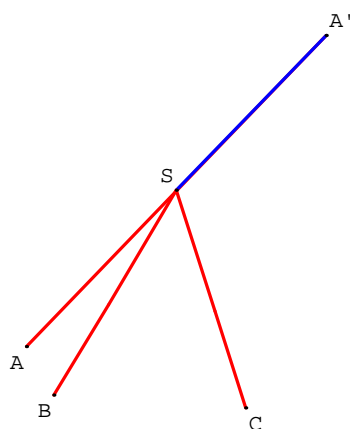


FIG 10

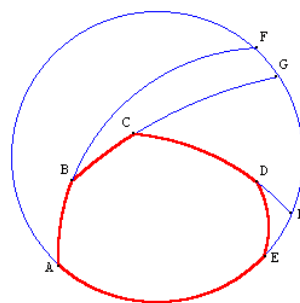


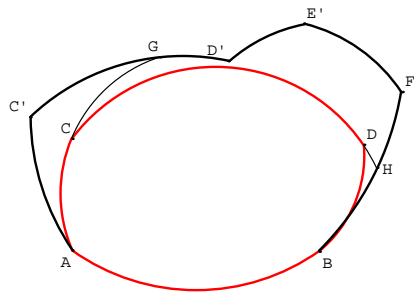
FIG 11

Preuve. L'arc mineur AE est porté par le demi-grand cercle AEF donc A et E sont intérieurs à P ; l'arc mineur AB est porté par le demi-grand cercle ABF donc B est intérieur à P . Ces deux

demi-grands cercles sont sécants suivant le diamètre [AF]. C est intérieur à P car la distance sphérique BC est inférieure à l'arc mineur BG inclus dans P. De même D est intérieur à P car l'arc mineur CD est inférieur à l'arc CH inclus dans P. Donc le polygone sphérique ABCDE est intérieur au polygone enveloppant ABFHE limités par les deux demi-grands cercles (ABF) et (AEF) et dont le périmètre est 2 droits + 2 droits.

Si le polygone sphérique est un triangle : la longueur (sphérique) de chacun d'eux est inférieur à la somme des deux autres et d'après le théorème ci-dessus la somme des trois côtés est inférieure à la circonférence d'un grand cercle de la sphère. Hadamard démontre que ces deux conditions sont suffisantes et réalise la construction sur la sphère, à l'aide du compas, d'un triangle dont les côtés répondent à ces conditions.

FIG 12



De même on peut construire un angle trièdre dont trois faces sont données et qui répondent aux conditions ci-dessus.

III Trièdres supplémentaires et triangles polaires

Trièdres supplémentaires

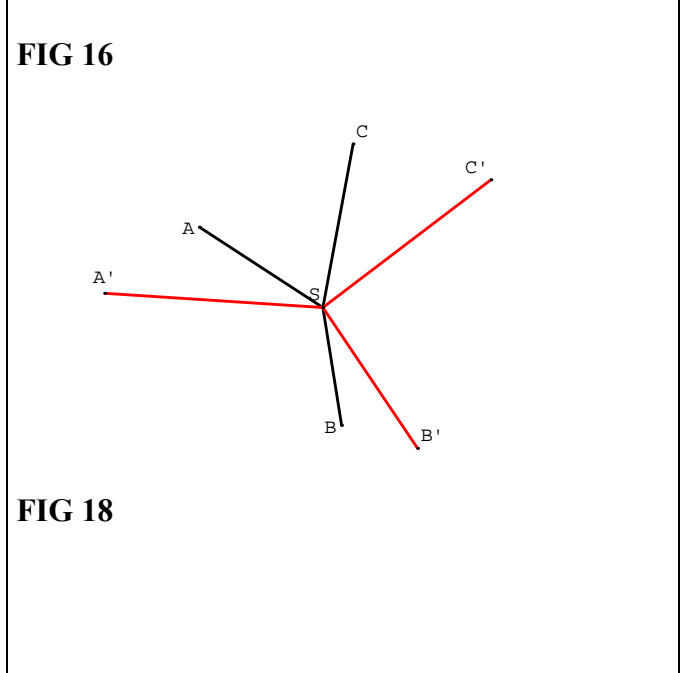
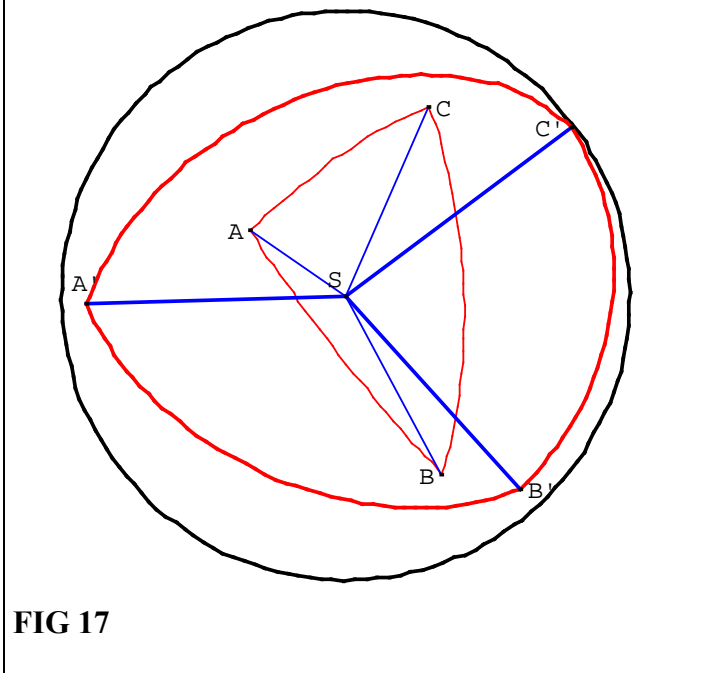
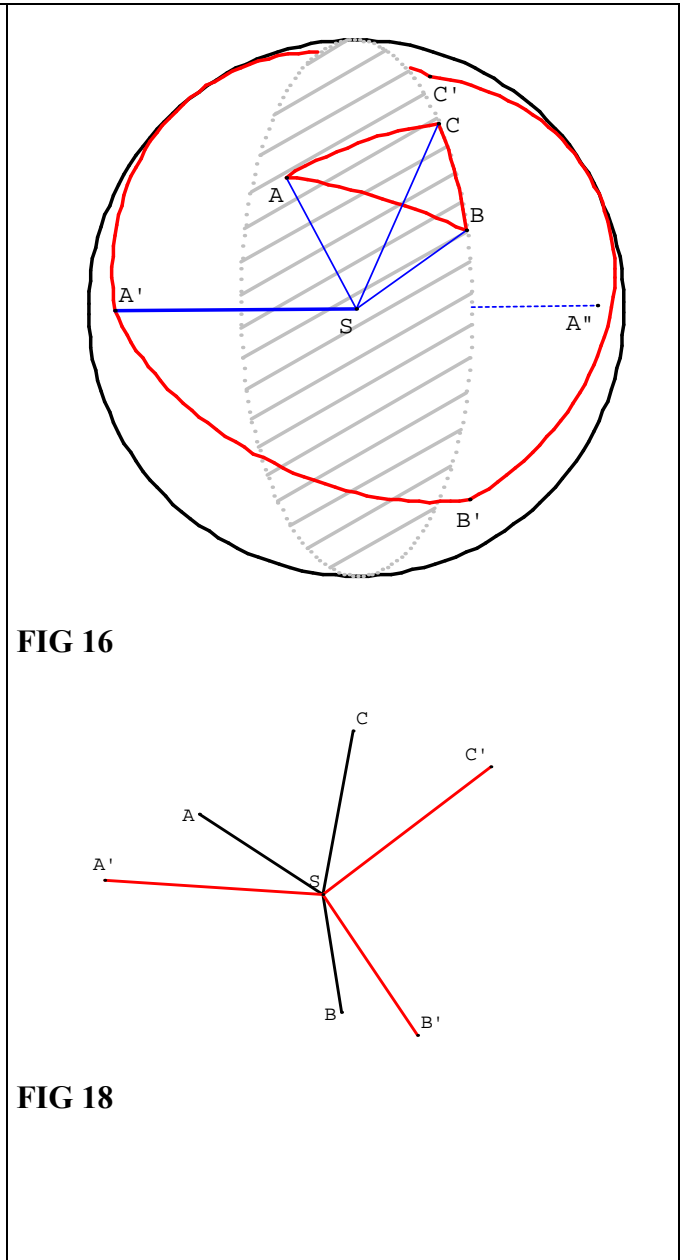
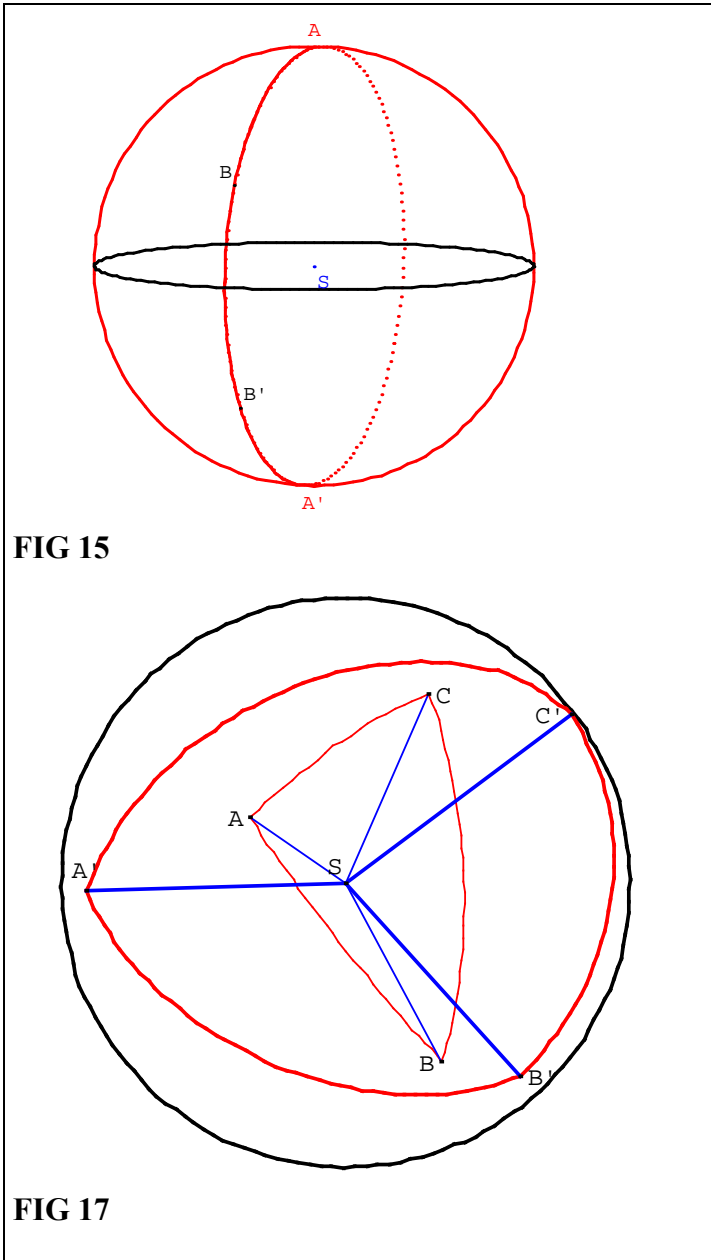
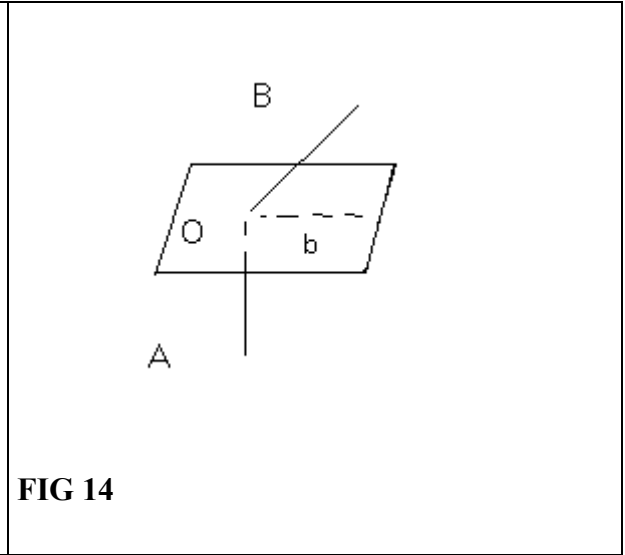
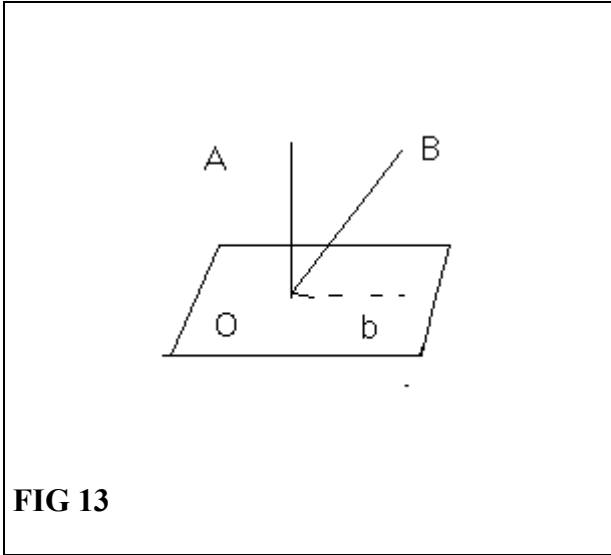
Lemme. Si par un point d'un plan, on mène deux demi-droites, l'une perpendiculaire, l'autre oblique à ce plan, ces deux demi-droites forment un angle aigu ou obtus, suivant qu'elles sont du même côté du plan ou non. (cf FIG 13 et 14)

Soit (Ob[la projection orthogonale de (OB[sur ce plan Q : les trois demi droites avec (OA[sont dans le même plan perpendiculaire au plan Q : si OA et OB sont du même côté de Ob, $\widehat{A\hat{O}B} < \widehat{A\hat{O}b}$ donc aigu. Par contre dans le cas contraire $\widehat{A\hat{O}B} > \widehat{A\hat{O}b}$ donc obtus.

Triangles sphériques polaires.

Lemme I. L'arc de grand cercle mineur qui joint un point quelconque B de la sphère à l'un des pôles A d'un grand cercle donné est plus petit ou plus grand qu'un quadrant, suivant que le pôle A est ou non, par rapport au grand cercle donné, dans le même hémisphère que le point B. (cf FIG 15)

La démonstration est évidente.



Sur la FIG 16, notons le triangle ABC sur la sphère de centre S et la zone hachurée qui représente le plan du grand cercle BC. Ce grand cercle a pour pôles les points A' et A'' et partage la sphère en deux hémisphères. Le point A est dans l'hémisphère gauche, donc A' sera le pôle dans le même hémisphère. En répétant ce choix pour les grands cercles CA et AB on obtient B' et C' et le triangle polaire A'B'C' de ABC.

Sur la FIG 17, on distingue le triangle initial ABC et son triangle "polaire" A'B'C'.

S est le centre de la sphère s ; SA, AB, SC ainsi que SA', SB', SC' sont les rayons de la sphère que l'on peut considérer aussi comme arêtes des trièdres SABC et SA'B'C'.

Il est clair, à partir des figures 16 et 17 que l'arête SA' est perpendiculaire au plan SBC et située du même côté de ce plan que l'arête SA. Cette propriété reste vraie lorsqu'elle est adaptée aux arêtes SB' et SC' ; donc le trièdre SA'B'C' induit par le triangle "polaire" A'B'C' du triangle ABC est supplémentaire du trièdre SABC.

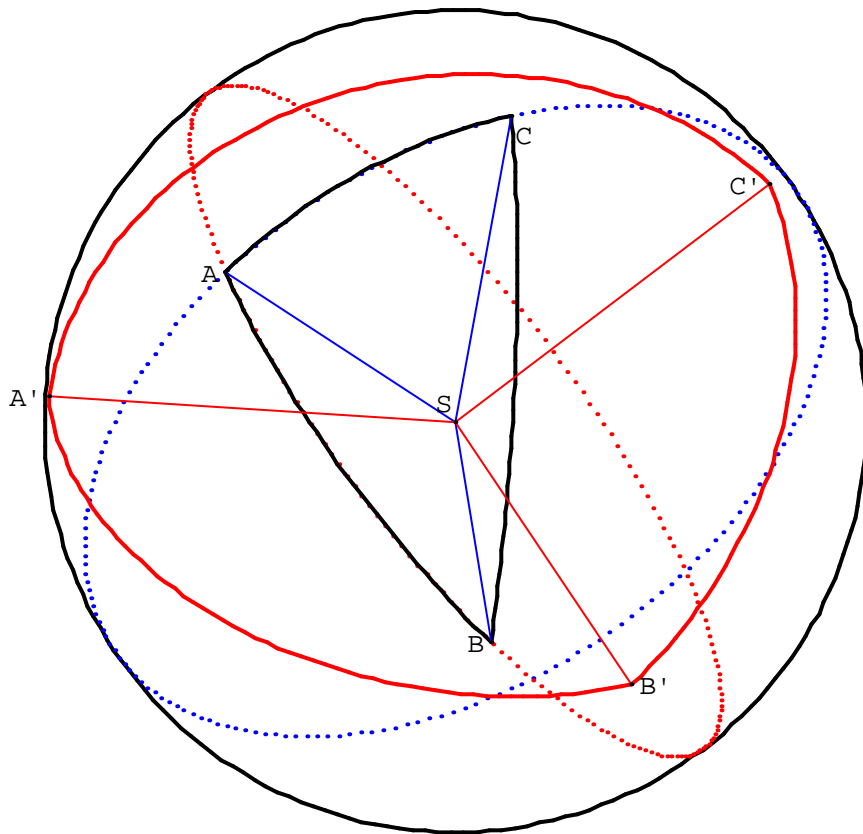
Réciproquement (cf FIG 18) Soient un trièdre SABC et son supplémentaire SA'B'C' découpant sur une sphère s de centre S les triangles sphériques ABC et A'B'C'. Puisque le rayon SA' est perpendiculaire au plan SBC, il l'un des pôles du grand cercle BC ; de plus l'arête SA' étant du même côté de ce plan que l'arête SA, A' est dans le même hémisphère que le point A par rapport au grand cercle BC. Ceci reste vrai pour les points B' et C' ; donc A'B'C' est le triangle polaire du triangle sphérique ABC.

Deux dièdres ayant leur sommet commun au centre d'une sphère, et supplémentaires l'un de l'autre, découpent sur la sphère deux triangles polaires l'un de l'autre (et réciproquement.)

<p>Définition 3. Etant donné un trièdre SABC, élevons, par le sommet S, une demi droite SA' perpendiculaire au plan SBC, du même côté de ce plan que l'arête SA ; une demi droite SB' perpendiculaire au plan SAC, du même côté de ce plan que l'arête SB ; une demi droite SC' perpendiculaire au plan SAB, du même côté de ce plan que l'arête SC. Le trièdre SA'B'C', qui a trois arêtes ainsi construites est dit supplémentaire du premier.</p> <p>Théorème4. Si un trièdre est supplémentaire d'un autre, réciproquement celui-ci est supplémentaire du premier.</p>	<p>Définition3bis. Soit ABC un triangle sphérique. Soient A' celui des deux pôles du grand cercle BC qui est situé (par rapport à ce grand cercle) dans le même hémisphère que A ; B' celui des deux pôles du grand cercle CA qui est (par rapport à ce grand cercle) dans le même hémisphère que B ; C' celui des pôles du grand cercle AB qui est dans le même hémisphère que C. Le triangle sphérique A'B'C' est dit triangle polaire de ABC.</p> <p>Théorème4bis. Si un triangle est polaire d'un autre, inversement celui-ci est polaire du premier.</p>
--	---

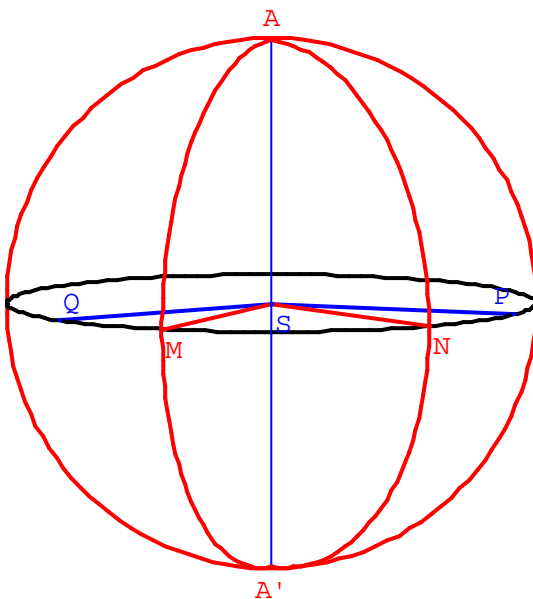
Raisonnons sur les triangles sphériques (cf FIG 19). C' étant un pôle du grand cercle AB, SC' est perpendiculaire au plan SAB, donc $\widehat{ASC'} = 1$ droit . De même B' est un pôle du grand cercle AC donc SB' est perpendiculaire au plan SAC, donc $\widehat{ASB'} = 1$ droit. Ainsi les arcs AB' et AC' étant égaux à un quadrant : A est un pôle du grand cercle B'C'. On sait que A'B'C' étant le polaire de ABC, A' et A sont du même côté par rapport au grand cercle BC ; donc la distance sphérique AA' est inférieure à un quadrant (cf LemmeI). Si l'on regarde alors le grand cercle B'C' , si A un pôle et A' n'était pas dans le même hémisphère, la distance sphérique AA' serait supérieure à un quadrant : A et A' sont donc dans le même hémisphère limité par le grand cercle B'C' . Ceci vaut de la même façon pour B' et C' . cqfd.

FIG 19



Lemme II. Etants donnés deux demi-grands cercle AMA' et ANA' , si P est le pôle du premier situé par rapport à celui-ci, dans le même hémisphère que le second, et Q , le pôle du second, situé par rapport à lui dans le même hémisphère que le premier, l'arc de grand cercle PQ est supplémentaire de l'angle de deux demi-grands cercles donnés

FIG 20

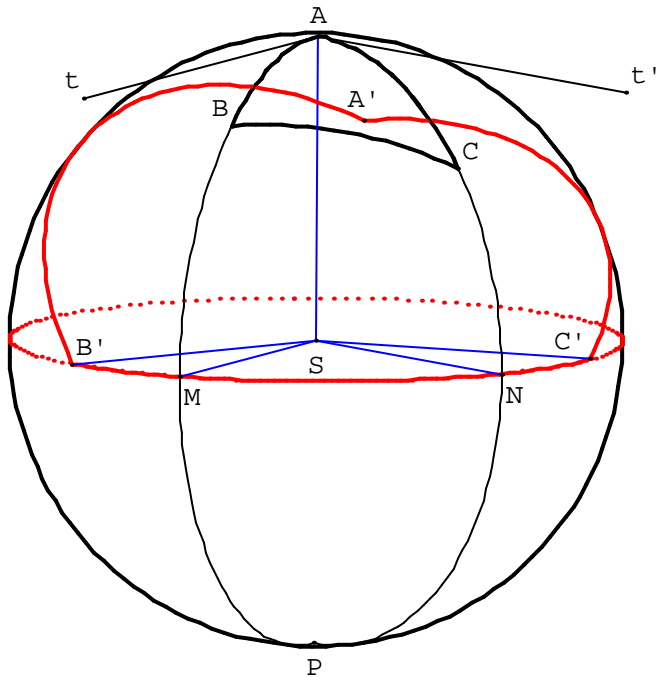


Soit le grand cercle de pôle A , il coupe les demi grands cercles en M et N et contient leurs pôles P et Q . Par hypothèse P et le demi grand cercle ANA' sont dans le même hémisphère par rapport à AMA' donc l'arc MP a le sens de l'arc MN . De la même façon NQ a le sens de l'arc NM . Les angles au centre MSN et PSQ à côtés perpendiculaires sont alors supplémentaires, ainsi les arcs correspondants. On en déduit alors les théorèmes suivants :

Théorème 5. Quand deux dièdres sont supplémentaires, les faces de l'un sont les suppléments des dièdres de l'autre.

Théorème 5bis. Si deux triangle sphériques sont polaires l'un de l'autre, chaque côté de l'un est supplémentaire de l'angle correspondant de l'autre.

FIG 21



Soient deux triangles polaires, ABC et A'B'C' sur la sphère s de centre S. (cf FIG 21). Le sommet B' pôle du grand cercle AC et le sommet C' pôle du grand cercle AB sont tels que SB' est perpendiculaire au demi-grand cercle ACN et SC' est perpendiculaire au demi grand cercle ABM. Nous sommes dans les hypothèses du Lemme II donc B'ŜC' et MŜN sont supplémentaires. tÂt' l'angle en A du triangle polaire ABC est tel que At est tangent au demi-grand cercle ABN en A, donc At est perpendiculaire en A au rayon SA ; ainsi dans le plan SAB, At et SM sont parallèles. De même At' et SN sont parallèles ; donc tÂt' = MŜN le supplémentaire de B'ŜC'.

Le résultat sur les triangles sphériques entraînent celui sur les trièdres : remarquons que tÂt' est le rectiligne du dièdre B.SA.C de ABC, et B'ŜC' la face correspondante de A'B'C'. Résumons les relations : trièdre de sommet S et triangle sphérique ABC sur une sphère centrée en S.

<p>Trièdre SABC Face BŜC Dièdre B.SA.C SABC et SA'B'C' supplémentaires</p>	<p>Triangle sphérique ABC Côté BC Angle en A : tÂt' ABC et A'B'C' triangles polaires l'un de l'autre</p>
<p>Le théorème ci-dessus permet de passer des propriétés des dièdres aux faces. Théorème 6. Dans tout trièdre : 1°) Chaque dièdre augmenté de deux droits, est plus grand que la somme des autres. 2°) La somme des trois dièdres est plus grande que 2 droits.</p>	<p>Théorème 6bis. 1°) Chaque angle d'un triangle sphérique augmenté de deux droits, est plus grand que la somme des deux autres. 2°) La somme des angles d'un triangle sphérique est comprise entre 2 droits et 6 droits.</p>

Preuve. Raisonnons sur le triangle sphérique ABC sur la sphère s de centre S . Soient a, b et c les côtés du triangle ainsi : a = mesure de la longueur de l'arc mineur BC. Soient A, B et C les angles de ce triangle. Soit $A'B'C'$ le triangle polaire de ABC.

Sur la figure 21 ci-dessus, en appliquant le théorème : $a = 2\text{drts} - B'\hat{S}C'$ or $B'\hat{S}C' = \hat{A}$, donc

$a = 2\text{drts} - \hat{A}$; $b = 2\text{drts} - \hat{B}$; $c = 2\text{drts} - \hat{C}$. or (3° partie II corollaire fig 9) $a < b + c$

donc $2\text{drts} - \hat{A} < 2\text{drts} - \hat{B} + 2\text{drts} - \hat{C}$; ce qui entraîne $\hat{A} + 2\text{drts} > \hat{B} + \hat{C}$. (1)

On sait également (2° Partie fig 12) que $a + b + c < 4\text{drts}$ donc : $6\text{drts} - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C} < 4\text{drts}$
Ainsi : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 2\text{drts}$ (2)

La somme $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$ est évidemment inférieure à 6drts puisque chaque terme est $< 2\text{drts}$. Cqfd.

Hadamard démontre que réciproquement, étant donné trois angles \hat{A}, \hat{B} et \hat{C} satisfaisant à (1) et (2) on peut construire un triangle sphérique dont les angles sont \hat{A}, \hat{B} et \hat{C} .

Remarque : contrairement à un triangle plan, la somme des angles d'un triangle sphérique est supérieure à 2drts .

IV Cas d'égalités des trièdres (respectivement des triangles sphériques)

<p>1° Cas d'égalité des trièdres <i>Deux trièdres sont égaux ou symétriques s'ils ont une face égale adjacente à deux dièdres égaux chacun à chacun.</i></p>	<p>1° Cas d'égalités des triangles sphériques. <i>Sur une même sphère ou sur des sphères égales, deux triangles sphériques sont égaux ou symétriques s'ils ont un côté égal adjacents à deux angles égaux chacun à chacun.</i></p>
---	---

Raisonnons sur les triangles sphériques. Soient les triangles sphériques ABC et A'B'C' , tels que $BC = B'C'$ et ses angles $\hat{B} = \hat{B}'$; $\hat{C} = \hat{C}'$, supposons qu'ils aient même disposition . Si l'on fait coïncider B'C' sur son égal BC, le sommet B' en B et le sommet C' en C, les angles en B et C étant respectivement égaux et de même sens à ceux en B' et C', alors B'A' va venir sur BA et C'A' sur CA ; donc A' va coïncider avec A.

Si les deux triangles n'ont pas même disposition, le second aura la même disposition que le symétrique de l'autre et sera par conséquent égal à ce symétrique.

<p>2° Cas d'égalités des trièdres <i>Deux trièdres sont égaux ou symétriques, lorsqu'ils ont un dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune.</i></p>	<p>2° Cas d'égalités des triangles sphériques. <i>Deux triangles sphériques sont égaux ou symétriques s'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.</i></p>
---	--

La démonstration est identique à la précédente.

<p>3° Cas d'égalité des trièdres <i>Deux trièdres sont égaux ou symétriques s'ils ont les trois faces égales chacune à chacune.</i></p>	<p>3° Cas d'égalités des triangles sphériques. <i>Deux triangles sphériques sont égaux ou symétriques s'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.</i></p>
--	---

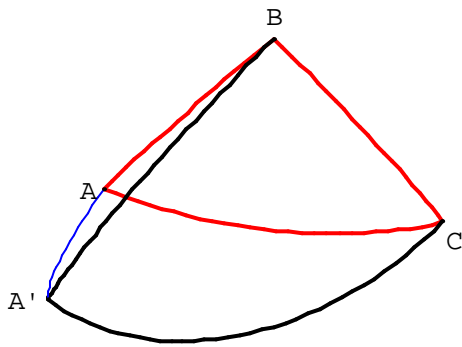


FIG 22

Raisonnons sur les triangles : s'ils ont même disposition, faisons coïncider B et B' et C et C'. Les points A et A' sont dans le même hémisphère dont la frontière est le grand cercle BC. Supposons que A et A' ne coïncident pas : puisque les côtés des triangles sont égaux les points B et C seraient équidistants sur la sphère de A et A' donc appartiendraient au grand cercle passant par B et C et le milieu J de l'arc mineur AA'. Or ce grand cercle laisse A et A' dans le même hémisphère, donc c'est impossible et A coïncide avec A'.

4° Cas d'égalité des trièdres.

Deux trièdres sont égaux ou symétriques lorsqu'ils ont leur trois dièdres égaux chacun à chacun.

4° Cas d'égalité des triangles sphériques

Deux triangles sphériques sont égaux ou symétriques s'ils ont leurs trois angles égaux chacun à chacun.

Ce cas n'a pas son équivalent dans le plan euclidien. Soient ABC et A'B'C' répondant aux conditions. Les triangles polaires de ABC et A'B'C' ont respectivement leurs côtés supplémentaires des angles de ABC, donc également des angles de A'B'C'; donc ils ont leurs côtés respectivement égaux. D'après le Cas n°3 les triangles polaires sont égaux ou symétriques. Par suite les triangles ABC et A'B'C' sont égaux ou symétriques.

Propriété. Deux trièdres qui ont leurs arêtes parallèles chacune à chacune et de même sens (respectivement de sens contraire) sont égaux (respectivement symétriques).

Trièdre isocèle.

Définition 6. Un trièdre est isocèle s'il a deux faces égales.

Théorème 7 Tout trièdre superposable qui est superposable à son symétrique est isocèle.

Triangle sphérique isocèle.

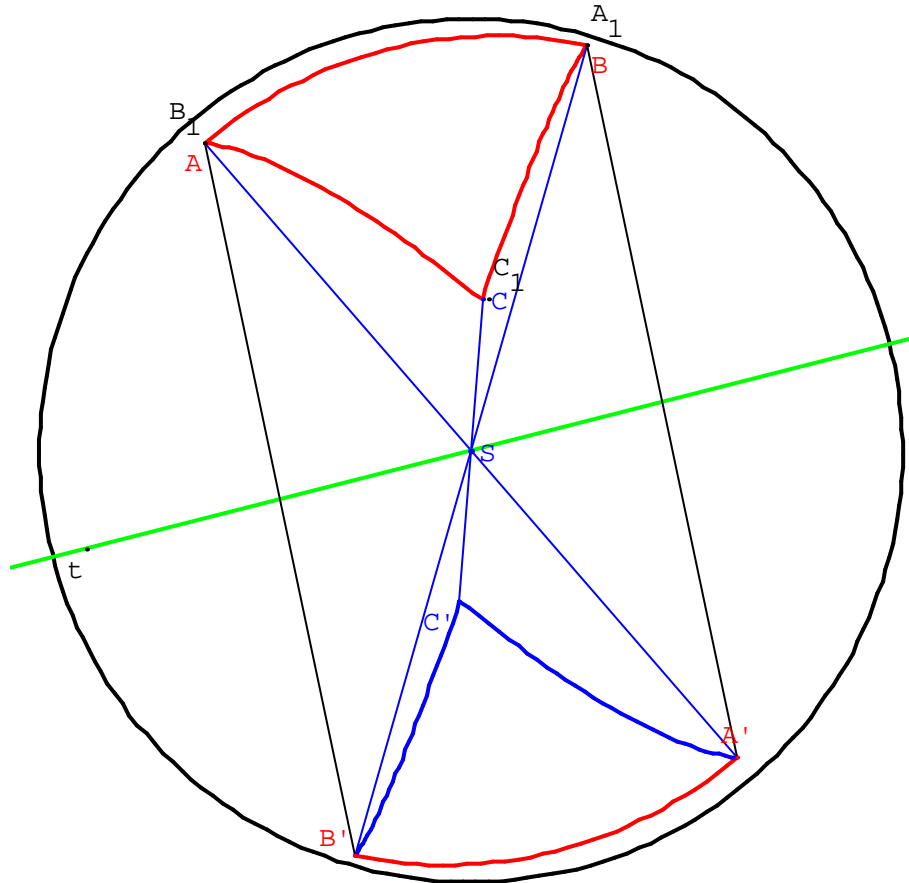
Définition 6bis. Un triangle sphérique est isocèle s'il a deux côtés égaux.

Théorème 7bis. Tout triangle sphérique superposable à son symétrique est isocèle.

Raisonnons sur les triangles.

Soit le triangle sphérique ABC et A'B'C' symétrique de ABC, par exemple dans la symétrie centrale σ de centre S (cf FIG 23 ci-dessous). Ils ont leurs côtés respectivement égaux deux à deux mais sont de disposition inverse ; ici ABC est de sens rétrograde et A'B'C' est de sens direct. Donc il ne pouvons coïncider par leur sommets homologues dans un déplacement ; c'est à dire A en A', B en B' et C en C' est impossible. Considérons le plan ASB qui contient A' et B' ; soit St la médiatrice commune des segments [AB'] et [A'B] ; appelons r le demi-tour d'axe St, il transforme A' en B1=B et B' en B1=A par définition. Le point C1 image de C' par r est en général distinct de C : puisque C1A = C'B' = CB (1) et C1B = C'A' = CA (2), les points C et C1 sont sur le grand-cercle "médiateur" de l'arc mineur AB qui est perpendiculaire à AB en son milieu J. Le triangle BAC1 a la même disposition que le triangle

FIG 23.

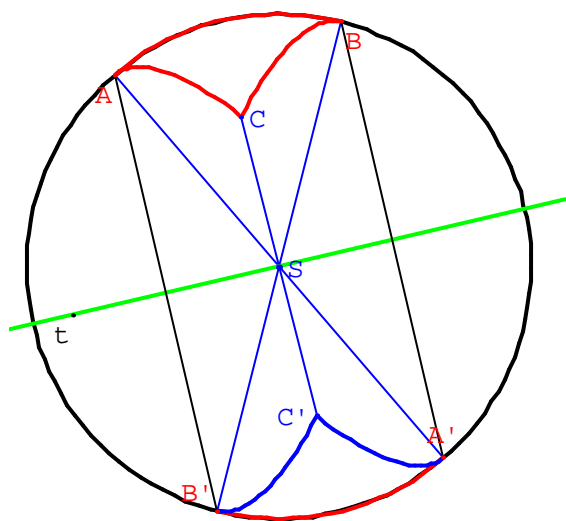


$A'B'C'$; par suite $ABC1$ a la même disposition que ABC donc C et $C1$ sont dans le même hémisphère limité par le grand cercle AB , s'ils sont confondus, d'après (1) et (2) ci-dessus alors $CA = CB$ et ABC est isocèle.

<i>Réciproquement, tout trièdre isocèle est superposable à son symétrique.</i>	<i>Réciproquement, tout triangle sphérique isocèle est superposable à son symétrique.</i>
--	---

Raisonnons sur les triangles. Soit ABC et $A'B'C'$ symétrique de ABC (cf FIG 23). La FIG 24 est la projection orthogonale de la figure sur le plan SAB , C est devant le tableau et C' derrière. Si les arcs mineurs $CA = CB$, alors $C'B' = C'A'$ et le demi-tour r , qui conserve la distance transforme C' en $C1$ tel que le triangle sphérique $BAC1$ soit de même sens que $A'B'C'$, donc $ABC1$ a même sens que ABC et leurs éléments sont égaux donc $C = C1$.

FIG 24



Théorème 8. Dans un trièdre isocèle, les dièdres opposés aux faces égales sont égaux

Théorème 8 bis. Dans un triangle sphérique isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.

Raisonnons toujours sur les triangles sphériques.

Dans la superposition ci-dessus du triangle $A'B'C'$ sur BAC , l'angle $\hat{A}' = \hat{B}$; or par symétrie de centre S les angle \hat{A} et \hat{A}' sont égaux ; donc $\hat{A} = \hat{B}$.

La réciproque des théorèmes 8 et 8 bis est vraie.

Je rappelle que tous les points abordés par Hadamard sur les angles polyèdres ne sont pas reconduits ici. L'auteur termine son chapitre en marquant les similitudes nombreuses entre les trièdres, les triangles sphériques et les triangles plans. Il marque cependant les différences . Les côtés d'un triangle plat sont des segments alors que ceux d'un triangle sphériques sont des arcs de cercles. Le périmètre d'un triangle sphérique est inférieur à la circonférence d'un grand cercle ($2\pi R$) alors que celui d'un triangle plat n'est pas limité. La somme des angles d'un triangle sphérique est compris entre π et 3π alors que pour un triangle plan , elle est égale à π . Enfin il n'y pas de triangles sphériques semblables ; en effet lorsqu'ils ont leurs angles respectivement égaux, ils sont égaux ou symétriques(4° cas d'égalité)

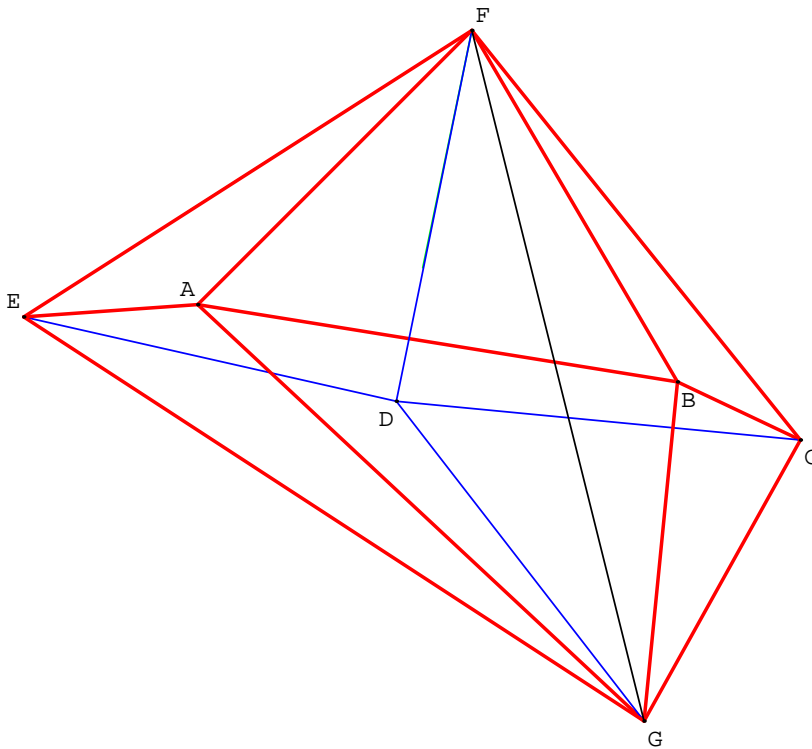
4° PARTIE NOTIONS GENERALES SUR LES POLYEDRES (LIVRE VI Chapitre I)

I DEFINITIONS

Définition 1. On nomme polyèdre un volume limité par des surfaces toutes planes. Les portions de plans qui comprennent ainsi entre elles le polyèdre sont dites les faces.

Chaque face (cf FIG 1) est un polygone (tel ABF ou ABCDE). Les côtes de ce polygone sont les arêtes du polyèdres (telle AB), et l'on constate que chaque arête est commune à deux faces. Les sommets des mêmes polygones sont les sommets du polyèdre (tels A, B, C,.... G). Chaque sommet est commun à au moins trois faces, c'est le sommet d'un angle polyèdre formé par ces faces.

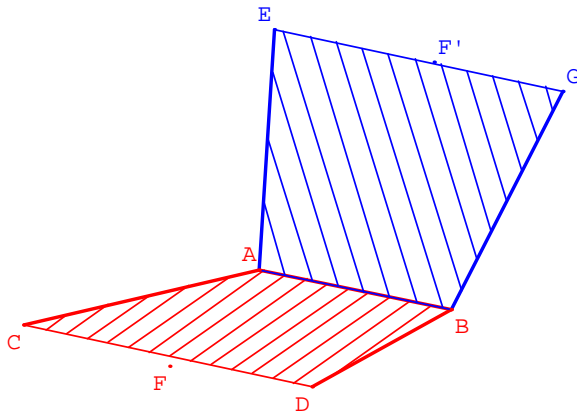
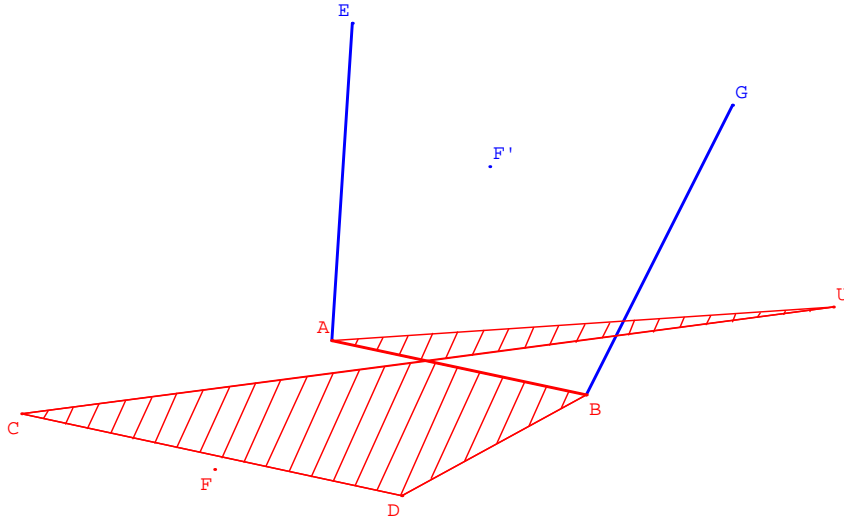
On note diagonale du polyèdre toute droite joignant deux sommets sur des faces distinctes(telle FG ou DB). On note plan diagonal tout plan qui passe par trois sommets non situés sur la même face



Définition 2 Un polyèdre est dit convexe s'il est situé tout entier d'un seul et même côté par rapport au plan d'une quelconque d'une des faces, prolongé indéfiniment. Dans le cas contraire il est dit concave.

Propriété 1. *Un polyèdre convexe a pour faces des polygones convexes.*

En effet soit deux faces F et F' d'arête commune AB , si F (en rouge) n'était pas toute entière du côté de l'arête AB dans le plan de F , un sommet U de F serait de l'autre côté de la droite AB dans le plan de F ; dans ce cas ce sommet U ne serait pas du même côté de la face F' (en bleu) que le sommet C de F (cf FIG 2), F présenterait un point C et un point U de part et d'autre de la face F' , et le polyèdre ne serait pas convexe.



Donc la disposition est nécessairement celle de la figure 3 pour les faces F et F' .
On en déduit

Propriété 2. *L'angle polyèdre formé par les faces attenantes au même sommet d'un polyèdre convexe est toujours convexe.*

FIG 2 et 3

Propriété 3 . *Une droite ne peut couper la surface d'un polyèdre convexe en plus de deux points.*

En effet si une droite coupe trois faces en M , M' et M'' ; alors si F est la face passant par M' les points M et M'' du polyèdre seraient de part et d'autre du plan cette face, le polyèdre ne serait pas convexe.

II CLASSIFICATIONS DES POLYEDRES

On ne peut classer les polyèdres par le nombre de leurs faces comme les polygones par leurs côtés; par exemple un cube a six faces, une pyramide à base pentagonale a également six faces. Dans la suite du chapitre, non reprise ici, Hadamard définit et précise les propriétés des prismes, les parallélépipède, (donc le cube), les pyramides.

Il termine en démontrant que tout polyèdre peut être décomposé en pyramides.

IN "COMPLEMENTS DE GEOMETRIE DANS L'ESPACE"¹.

5° Partie : Chapitre IV : Aires des polygones sphériques.

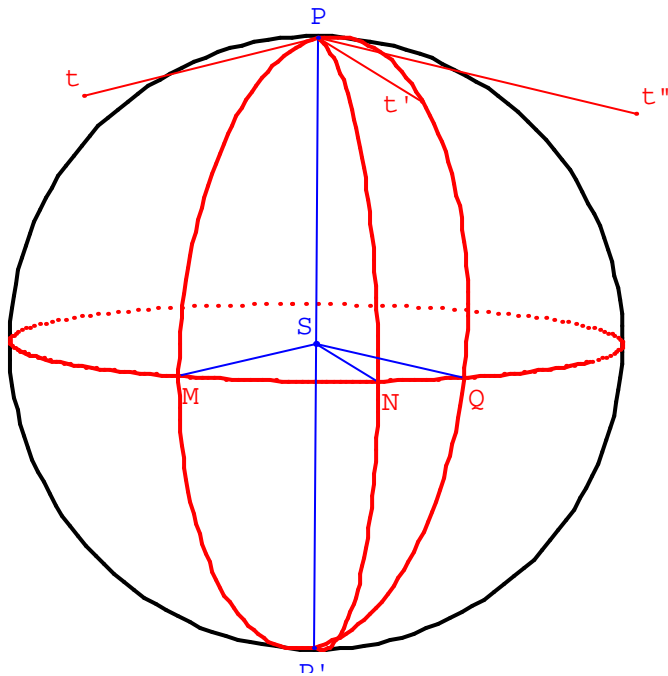
Hadamard suppose dans ce chapitre que l'unité d'angle est le radian et l'unité de longueur le rayon de la sphère. Ceci posé l'aire de la sphère est 4π .

I AIRE DU FUSEAU SPHERIQUE

Définition 1. On nomme "fuseau sphérique" la portion de sphère comprise entre deux demi-grands cercles limités à leurs points communs ; autrement dit la section de la sphère par un dièdre ayant pour arête un diamètre.

La mesure du dièdre est l'angle du fuseau sphérique

FIG 4



Théorème 1. Deux fuseaux en faisant partie d'une même sphère sont entre eux comme leurs angles.

1° Deux fuseaux de même angle sont égaux

2° Le fuseau C qui a pour angle la somme des angles de deux fuseaux A et B, a pour aire la somme des aires.

Ceci est évident si les fuseaux sont adjacents (FIG 4) ; sinon on peut les rendre adjacents suivant le 1°.

Corollaire. L'aire d'un fuseau a pour mesure le double de son angle. (le rayon de la sphère est l'unité)

Le fuseau dont l'angle est $\pi/2$ a pour aire le quart de l'aire de la sphère π , donc le rapport de son angle à son aire est 2 pour le fuseau sphérique. Si l'angle du fuseau est quelconque, le résultat se généralise d'après le *théorème 1* ci-dessus.

¹ L'ouvrage d'Hadamard sur la géométrie dans l'espace se compose de dix "Livres" et se termine par "Compléments de géométrie dans l'espace" formés de 9 chapitres et de 7 "Notes"; dont la note K sur le Théorème de Cauchy sur les polyèdres convexes.

II AIRE D'UN TRIANGLE SPHERIQUE.

Lemme. Deux triangles sphériques symétriques l'un de l'autre sont équivalents. (ont même aire)

1° Cas des triangles sphériques isocèles. Nous avons vu (réciproque du th 7 bis 3° partie) que deux triangles symétriques et isocèles peuvent être superposés, donc ont même aire.

2° Cas général. Soit un triangle sphérique quelconque ABC et son symétrique A'B'C'. Soit O l'un des pôles du cercle circonscrit ABC, nous supposons que O est "intérieur" au triangle sphérique ABC. Par définition O est le pôle du triangle. Les arcs mineurs OA, OB et OC sont égaux : ainsi ce triangle est décomposé en trois triangles isocèles OAB, OBC et OAC (cf FIG 5). Le triangle symétrique A'B'C' est la somme de trois triangles isocèles O'A'B', O'B'C' et O'A'C' où O' est le pôle du cercle circonscrit au triangle A'B'C'. Ces trois triangles isocèles sont superposables aux précédents (cf Th 8Bis 3° Partie), ils ont donc respectivement même aire. cqfd

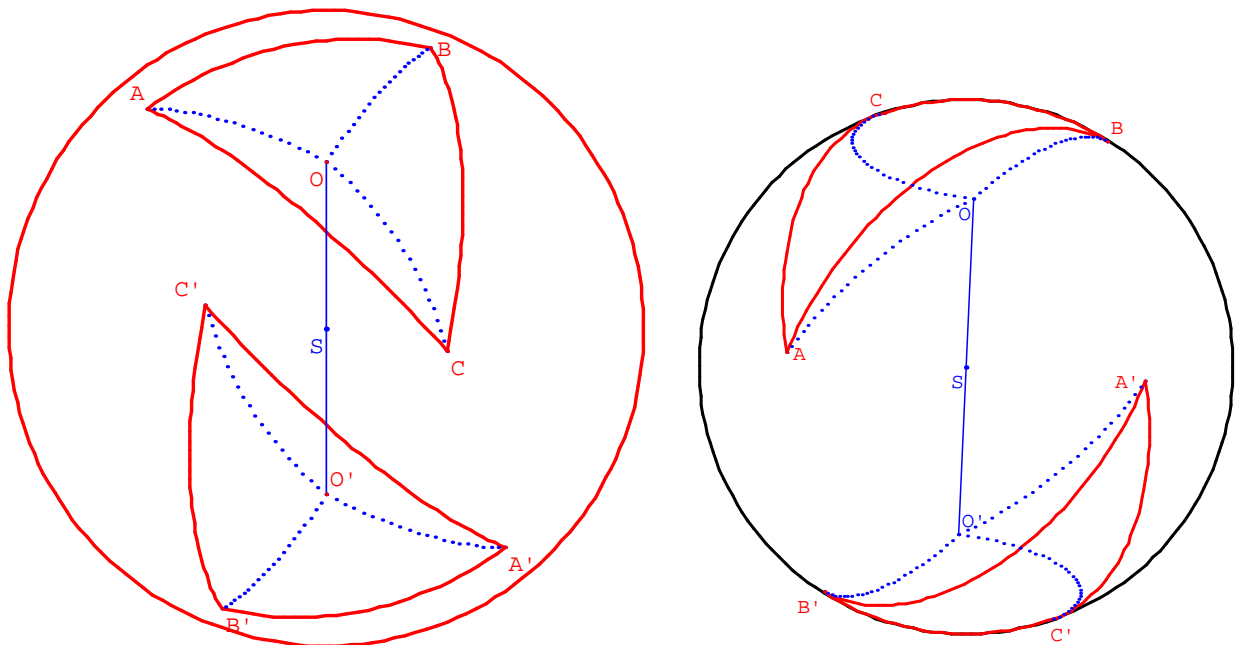


FIG 5 et 6

Si le point O est "extérieur" au triangle (par exemple FIG 6) alors l'aire de ABC serait la somme de aires de OBC et OCA diminuée de l'aire du triangle OAB ; A'B'C' étant formé de triangles ayant même aire que les précédents le résultat en découle.

Théorème 2. L'aire d'un triangle sphérique a pour mesure l'excès de la somme de ses angles sur π . (rappelons que la sphère a pour rayon l'unité de longueur)

Soit un triangle sphérique ABC (FIG 7) et les points A', B' et C' diamétralement opposés à A, B et C. Considérons le fuseau sphérique formé des demi-grands cercles ACA' et ABA', son angle est l'angle du dièdre $C.AA'.B$, c'est à dire l'angle \hat{A} du triangle sphérique CAB. L'aire du fuseau ainsi défini est la somme des aires des triangles CAB et A'CB

$Fus. \hat{A} = tr ABC + tr BCA'$ de même

$Fus. \hat{B} = tr ABC + tr ACB'$

$Fus. \hat{C} = tr ABC + tr ABC''$

Le lemme précédent permet de remplacer l'aire du triangle (ABC') par celle de son symétrique $A'B'C'$. La somme des triangles ABC , BCA' , ACB' et $A'B'C'$ est l'aire de l'hémisphère limité par le grand cercle ABA' , c'est à dire 2π .

Il vient alors en ajoutant membre à membre ces trois égalités :

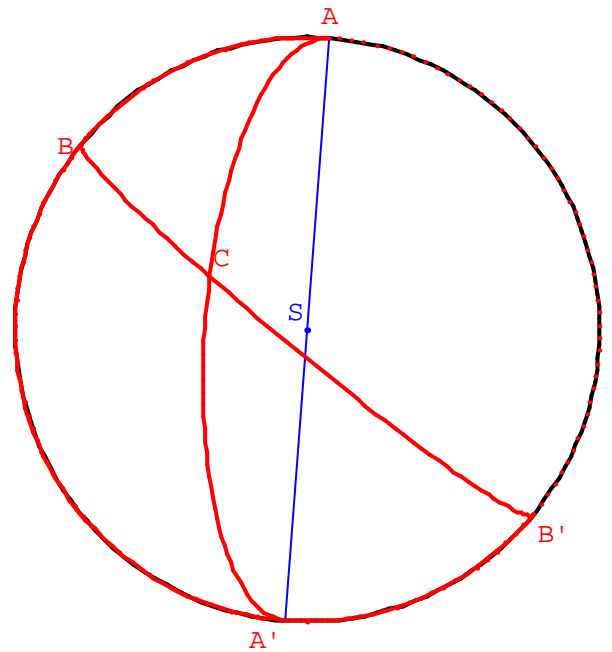
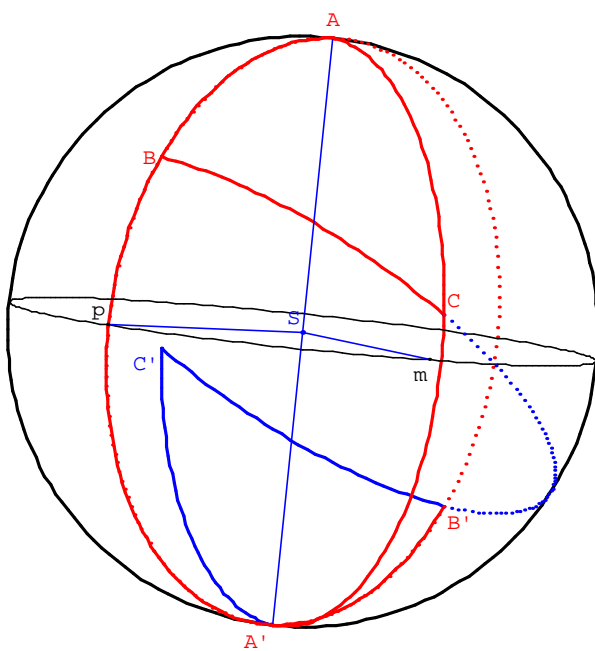
$Fus. \hat{A} + Fus. \hat{B} + Fus. \hat{C} = 2\pi + 2tr. ABC$

Or l'aire d'un fuseau sphérique est le double de son angle (*Théorème 1* ci-dessus) ; il vient en divisant les deux membres par deux : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi + tr. ABC$ et $tr. ABC = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi$

Sur la FIG 8 ci-dessus, projection orthogonale de la figure sur le plan du grand cercle ABA' , on voit que l'hémisphère limité par le grand cercle $ABA'B'$ (en rouge) est formé des triangles sphériques ABC , BCA' puis $AB'C$ et $A'B'C$. Le triangle $A'B'C$ a même aire que son symétrique ABC' .

FIG 7

FIG 8



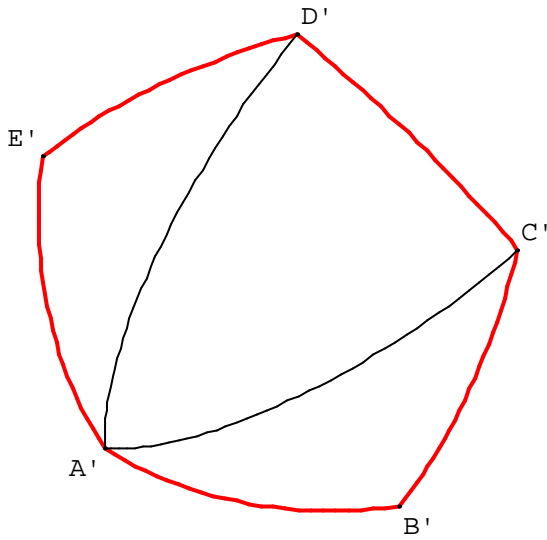
Corollaire. Un polygone sphérique de n côtés a pour mesure² l'excès de la somme de ses angles sur $(n-2)\pi$.

¹ Je reprends les notations d'Hadamard pour l'aire d'un fuseau.

² Il s'agit bien entendu de son aire dans l'unité choisie : le rayon étant l'unité de longueur.

Le polygone sphérique (cf FIG 9 : A'B'C'D'E') est décomposé en triangles sphériques par ses diagonales. S'il comporte n sommets : d'un sommet donné il part $(n-3)$ diagonales qui donnent lieu à $(n-2)$ triangles.

FIG.9



6° PARTIE. Chap V. THEOREME D'EULER. POLYEDRES REGULIERS

I LIMITATIONS IMPOSEES AUX POLYEDRES

Au début du Chap V des "COMPLEMENTS DE GEOMETRIE DANS L'ESPACE", Hadamart précise les types de polygones qui seront étudiés, en fixant des conditions.

Dans ce chapitre :

- *La surface limite des polyèdres sera d'un seul morceau.*
- *Il n'arrivera jamais qu'une arête soit commune à plus de deux faces, ni qu'un sommet soit communs à plusieurs angles formés avec les faces du solide.*
- *De plus chaque face aura elle même son contour d'un seul tenant*
- *Il n'arrivera jamais, nous le supposons, qu'un sommet soit l'extrémité commune de plus de deux arêtes appartenant à la même face.*

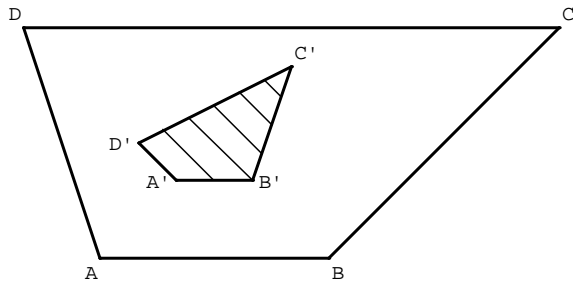


FIG1

La condition 3 est distincte de la condition 1, en effet sur la FIG 1, soit le prisme dont la base est la partie comprise entre le contour extérieur et la partie hachurée. Ce polyèdre a sa surface limite d'un seul tenant cependant la face de base n'est pas d'un seul tenant, puisque trouée par la partie hachurée. De même, sur la FIG 2, la surface comprise entre le contour extérieur et celui de l'aire hachurée CFG ne peut être, selon la condition 4, la face d'un polyèdre dans ce chapitre.

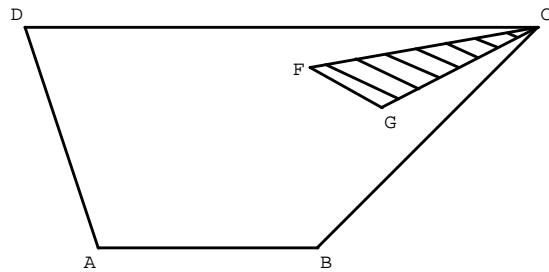


FIG 2

- *Lorsqu'on supprime une ou plusieurs faces d'un polyèdre, la surface restante, que nous supposerons être encore d'un seul tenant, n'est plus fermée, elle possède (outre les arêtes communes à deux faces), des arêtes libres, c'est à dire n'appartenant plus qu'à une seule face. Ces dernières forment le contour ou bord de la surface polyédrale ouverte considérée.*

II SECTION D'UNE SURFACE POLYEDRALE.

Définition1. Pratiquer une section d'une surface polyédrale ouverte, c'est d'abord joindre deux points du bord par un chemin situé sur la surface et qui ne se recoupe jamais ; puis ensuite fendre la surface suivant le chemin tracé. Si de plus le chemin est formé d'arêtes du polyèdres, dès lors que la section est pratiquée, deux faces F et F' séparée par une arête appartenant à la section(AB sur la FIG3) ne sont plus contiguës.

L'arête AB fait respectivement partie du bord de l'une et l'autre des surfaces ouvertes contenant la face F et la face F'.(FIG3)

UN EXEMPLE DE SECTION : FIG 3 et 4

Soit la section du parallélépipède rectangle ABCDEFGH ouvert sur le dessus (la face ADHE est enlevée) par le chemin joignant deux points du bord A et H ; le chemin ABCGH suivant les arêtes AB, BC, CG et GH.. Cette section partage le polyèdre initial ouvert en deux

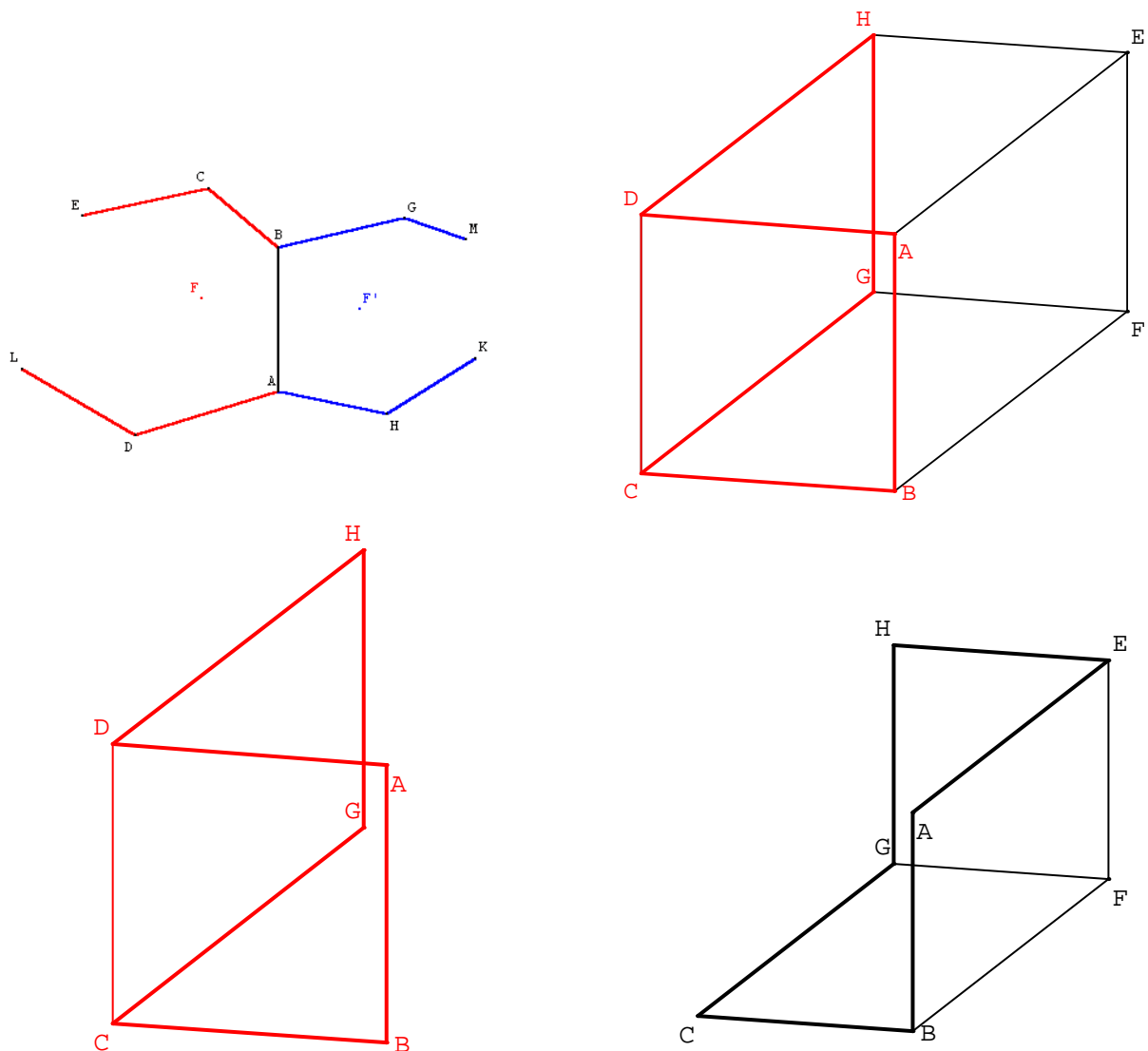


FIG5 et FIG 6

polyèdres ouverts. D'une part celui comportant les faces ABCD et CGHD ; et la seconde surface polyédrique ouverte qui comprend 3 faces : ABFE, BFGC et FGHE (FIG 6)

III SURFACE (OU AIRE) SIMPLEMENT CONNEXE

Définition 2 Deux surfaces¹ Σ et Σ' sont dites avoir *la même connexion* s'il existe une correspondance point par point de Σ sur Σ' qui applique tout point du contour de l'une sur un point du contour de l'autre ; telle que cette correspondance soit biunivoque ; et telle qu'à toute partie d'un seul tenant de Σ corresponde toujours une partie d'un seul tenant de Σ' , et réciproquement.

Il en est ainsi d'une surface Σ et de sa perspective Σ' sur un plan, lorsque Σ' n'a aucun point à l'infini et que chaque projetante d'un point de Σ n'a qu'un point commun avec Σ .

- Si deux surfaces (ou aires, Hadamard utilise ici indifféremment les deux termes) Σ et Σ' sont *de même connexion*, lorsqu'une *section s* morcèle Σ en deux parties séparées Σ_1 et Σ_2 ; alors l'image s' de s est une section de Σ' qui *morcèle* Σ' en deux parties Σ'_1 et Σ'_2 correspondant à Σ_1 et Σ_2 .

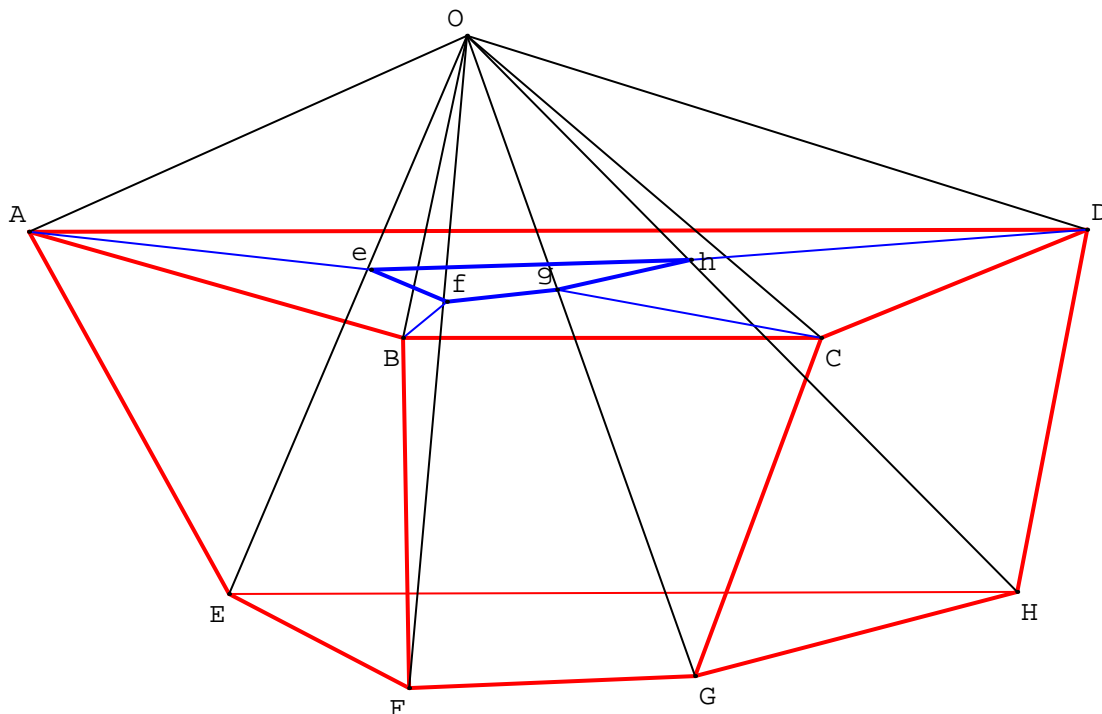
Définition 3. Une surface (ou aire) plane est simplement connexe si c'est une partie du plan dont le contour est d'un seul tenant.

Par exemple tout polygone plan P est simplement connexe et par conséquent toute surface, non nécessairement plane, ayant *même connexion* que P est simplement connexe.

Une surface plane Σ simplement connexe est morcelée, de façon évidente, par toute section en deux surfaces simplement connexes. Donc toute surface Σ' ayant même connexion que Σ , donc simplement connexe, sera morcelée par une section quelconque en deux surfaces simplement connexes.

Théorème 1. En enlevant une face F d'un polyèdre convexe P, on obtient toujours une surface Σ simplement connexe.

FIG7



Soit on point O situé dans le demi-espace de frontière la face F ne contenant pas le polyèdre. La surface Σ est le polyèdre privé de la face F. La perspective de centre O sur le plan de la

¹ Dans ce paragraphe, Hadamard utilise indifféremment aire pour surface (plane ou non)

face F de la surface Σ est la face F elle-même (FIG 7). La correspondance est bien point à point et biunivoque, de plus toute projetante coupe Σ en un seul point. La face F , comme polygone, est simplement connexe; les deux surfaces ayant même connexion (définition 2), la surface Σ est donc simplement connexe.

Définition 4. Si en supprimant une face d'un polyèdre P , on obtient une surface simplement connexe, P est appelé polyèdre de *genre zéro*. C'est le cas de tout polyèdre convexe.

IV THEOREME D'EULER

Théorème 2 (Th d'EULER). Dans tout polyèdre de genre zéro (et par conséquent, dans tout polyèdre convexe) le nombre de face augmenté de celui des sommets, donne le nombre d'arêtes plus deux. ($F+S = A+2$; si F est le nombre de face, S le nombre de sommets et A le nombre d'arêtes)

Si nous enlevons une face d'un polyèdre convexe quelconque (donc un polyèdre de *genre zéro* (cf définition 4)), nous obtenons une surface polyédrale ouverte avec une face en moins et toutes choses égales par ailleurs. Il suffit donc de prouver que pour toute surface polyédrale ouverte et simplement connexe : $F+S = A+1$.

Raisonnons par récurrence sur le nombre de faces noté F .

-Si $F = 1$, le polyèdre ouvert "se réduit" à un polygone et $1+S = A+1$ est évident.

-Supposons que le théorème soit vrai pour toutes les surfaces polyédrales de moins de F faces. Soit Σ une surface polyédrale ouverte et simplement connexe de F faces. Pratiqons une section de Σ selon un chemin qui joint deux points du bord et constitué d'arêtes et ne se recoupant pas. La surface Σ est alors "morcelée" en deux surfaces ouvertes Σ_1 et Σ_2 simplement connexe. Pour Σ_1 soit F_1 , S_1 et A_1 le nombre respectif de faces, de sommets et d'arêtes : l'hypothèse de récurrence (puisque le nombre de face est moindre que F) assure l'égalité :

$$F_1 + S_1 = A_1 + 1 \quad (1) \quad . \quad \text{De même pour } \Sigma_2 : \quad F_2 + S_2 = A_2 + 1 \quad (2)$$

FIG 8

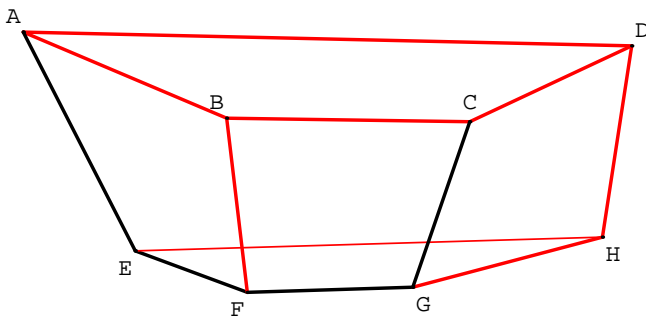
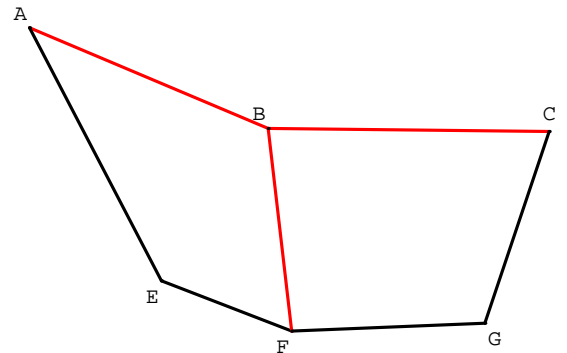
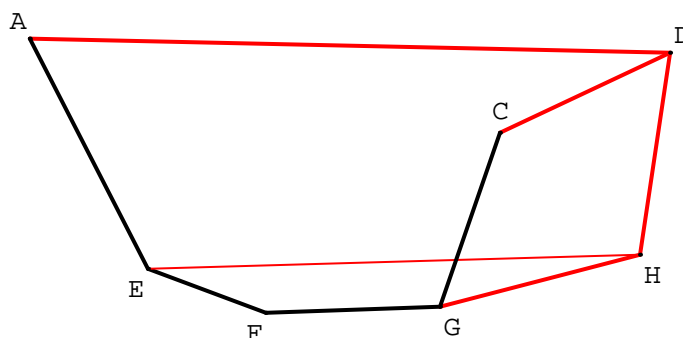


FIG 9 et 10



Par exemple, sur ces Figures 8, 9 et 10 la section suit le chemin AEFHG et conduit à deux surfaces polyédrales simplement connexes où les relations (1) et (2) sont vérifiées.



Mais si λ est le nombre des côtés de la section, et par conséquent $\lambda+1$ le nombre de ses sommets, on a :

$$(3) \quad \begin{aligned} A_1 + A_2 &= A + \lambda \\ S_1 + S_2 &= S + \lambda + 1 \end{aligned}$$

En effet dans la somme $A_1 + A_2$ le chemin qui comporte λ arêtes est compté deux fois, dans Σ_1 puis dans Σ_2 . De même dans la somme $S_1 + S_2$, les sommets du chemin de section $\lambda+1$ sont également comptés deux fois, dans Σ_1 puis dans Σ_2 . (par exemple FIG 8,9 et 10). Donc par addition membre à membre, puisque $F_1 + F_2 = F$ après la section, il vient d'après (1) et (2):
 $F_1 + F_2 + S_1 + S_2 = A_1 + 1 + A_2 + 1$

D'après les relations (3) : $F + S + \lambda + 1 = A + \lambda + 2$ donc $F + S = A + 1$. (4)

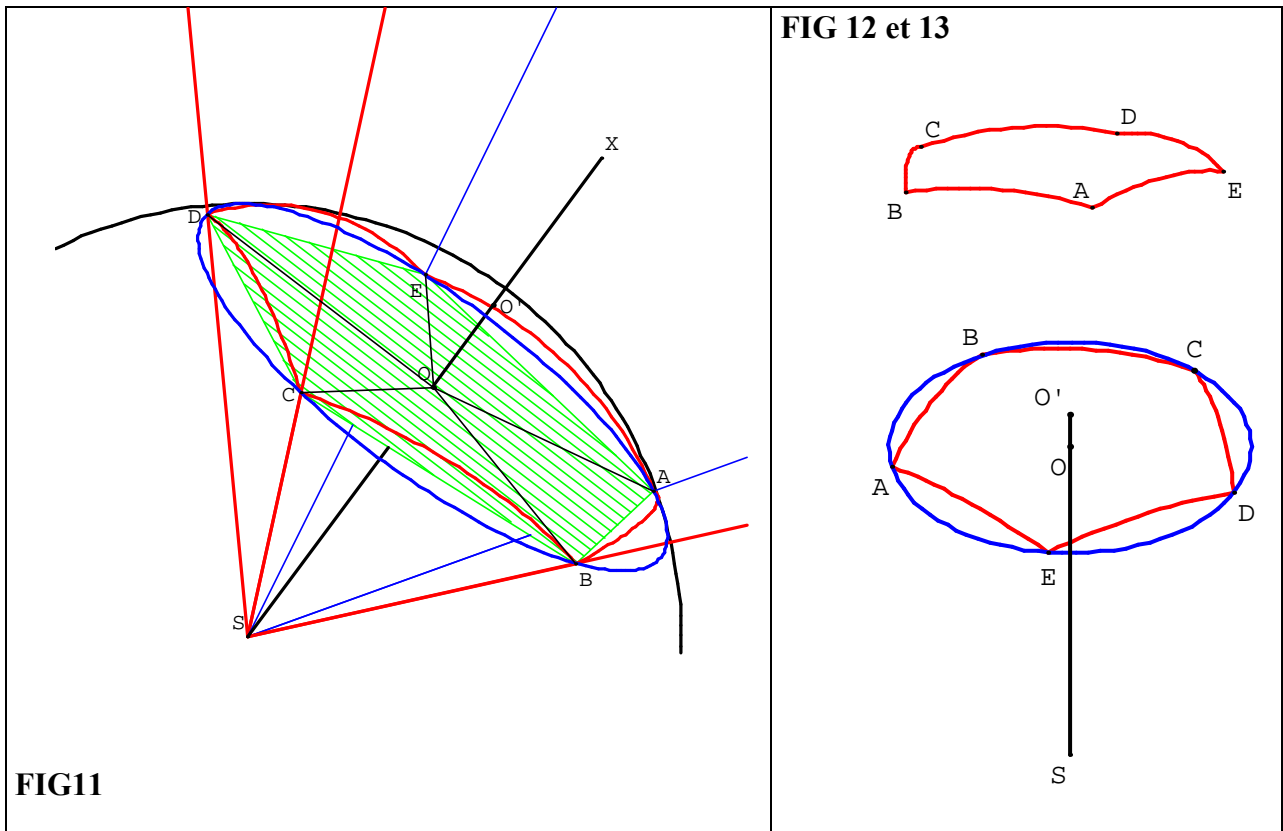
Ainsi, par récurrence la relation (4) est vraie quelque soit le nombre de face de la surface polyédrale dont on a enlevé une face. Le théorème d'Euler s'en déduit.

Hadamard démontre ensuite que le théorème est faux si la surface polyédrale couverte n'est simplement connexe.

IV ANGLES POLYEDRES REGULIERS ET ROTATIONS.

Définition 5. On nomme angle polyèdre régulier un angle polyèdre convexe dont toutes les faces sont égales et tous les dièdres égaux.

Définition 5 bis. On nomme polygone régulier sphérique un polygone sphérique convexe dont tous les côtés sont égaux et dont tous les angles sont égaux.



A un angle polyèdre régulier SBCDE (FIG11) , dont le sommet S est le centre d'une sphère s, correspond de façon évidente sur cette sphère un polygone régulier sphérique (FIG 12) dont les sommets sont A, B, C, D, et E : intersections des arêtes de l'angle polyèdre avec la sphère.

Sur cet angle polyèdre SABCDE, on distingue les trièdres consécutifs SABC, SBCD, SCDE, SDEA, SEAB. Ils sont égaux deux à deux comme ayant un dièdre égal (par exemple pour SABC le rectiligne du dièdre $\vec{A.SB.C}$ est égal à l'angle \hat{B} du polygone sphérique régulier ABCDE compris entre deux faces égales ; ces trièdres ayant la même *disposition*.

Si ABCDE... est un polygone plan régulier de n côtés (ici un pentagone) dont l'axe passe par S et O le centre du cercle (c) circonscrit ; O est la projection orthogonale de S sur le plan du polygone. La droite SX, où X est un point de la demi-droite SO, (FIG 10) est l'axe du polygone, c'est à dire l'ensemble des points de l'espace équidistant des sommets du polygone régulier ABCDE. Soit la rotation r d'axe \vec{SX} et d'angle $2\pi/n$ (fig 10 et suivante : $2\pi/5$) ; elle transforme l'arête SA en la suivante et ainsi de suite ... l'arête SE en SA. Cette rotation r transforme donc l'angle polyèdre en lui-même, on dit qu'elle " conserve " cette figure. Si l'on compose r avec elle même, $r \circ r = r^2$, celle-ci transforme SA en SC et ainsi de suite, elle "conserve" également la figure. De même pour r^p où p est entier ; de plus $r^n = \text{Identité}$.

On dit alors qu'une telle rotation d'axe \vec{SX} est d'ordre n . L'axe de la rotation \vec{SX} est appelé un axe n^{aire} ; binaire, ternaire ... pour la figure. Ici dans le cas de figure choisi (FIG 10) \vec{SX} est un axe d'ordre 5.

Remarque. Par exemple : si le polygone plan est un hexagone , $n = 6$, 2 divise 6 et $n' = 6/3 = 2$, la rotation r (\vec{SX} , $2\pi/6$) vérifie également $r^2 = \text{Identité}$, donc \vec{SX} , axe d'ordre six est aussi un axe binaire pour la figure. Plus généralement si n admet des diviseurs, soit p l'un d'eux alors \vec{SX} axe d'ordre n est aussi un axe d'ordre $n' = n/p$ pour la figure.

\vec{SX} , l'axe n^{aire} de l'angle polyèdre régulier, fait le même angle avec chaque arête ; donc le cône d'axe XS dont SA est une génératrice est circonscrit à l'angle polyèdre régulier. Le plan passant par O et perpendiculaire à XS coupe la sphère s selon le cercle (c) de centre O circonscrit au polygone sphérique ABCDE (cf FIG13) et au polygone plan ABCDE.

Sur la figure 13 on note O' un pôle du cercle (c) intérieur au polygone sphérique régulier ABCDE ; O' est appelé le pôle de ce polygone sphérique.

En définitive, à partir de l'angle polyèdre régulier initial nous avons défini une pyramide régulière de base ABCDE et de sommet S : il suffit de choisir des points A, B , ... E sur les arêtes tels que $SA = SB = \dots = SE$.

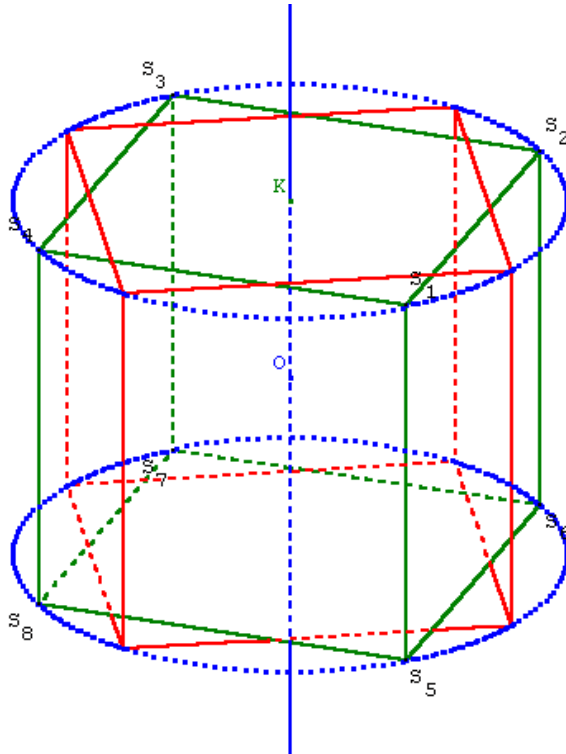
Notons que l'existence de plans de symétrie pour un polygone régulier induit des plans de symétries pour un angle polyèdre à n faces. Selon la parité de n ce sont les plans passant par XS et bissecteur des dièdres ou perpendiculaires aux faces. Dans notre cas de figure ($n = 5$) les plans de symétrie qui conserve l'angle polyèdre régulier passent par XS et le milieu des segments AB, BC, ... EA.

V POLYEDRES REGULIERS

Définition 6 . Nous nommerons polyèdre régulier un polyèdre convexe dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux et dont tous les angles polyèdres sont réguliers et égaux.

Propriété. Deux polyèdres réguliers tel qu'une face de l'un (donc toutes les faces) soit égale à une face de l'autre et un angle polyèdre de l'un égal à un angle polyèdre de l'autre sont égaux. Si de plus une face F du premier coïncide avec un F' du second et si les deux polyèdres réguliers sont du même côté par rapport à cette face, alors les polyèdres coïncident.

Théorème 3. Un polyèdre régulier "admet tout déplacement" dans lequel une face F vient sur une face F' , l'intérieur du polyèdre transporté étant du même côté de F' que l'intérieur du polyèdre primitif.



Sur La FIG 14, soit le cube dont les sommets sont numérotés de 1 à 8 en indice sur la lettre S (comme sommet). La rotation r d'axe \vec{OK} et d'un quart de tour dans le sens direct transforme $f = S_1S_4S_8S_5$ en $f' = S_1S_5S_6S_2$. Nous avons dessiné une position "intermédiaire" pendant cette rotation (en rouge). L'intérieur du cube transporté est bien du même côté de f' que l'intérieur du cube primitif. La position finale montre que le cube "transporté" coïncide avec le cube primitif.

FIG 14 Dans cette rotation l'arête S_4S_1 vient sur S_1S_2 .

Parmi les déplacements qui conserve le polyèdre P , dont parle le théorème 3, on peut en trouver un qui amène une face F sur une face quelconque F' , et une arête donnée AB de F sur une arête quelconque $A'B'$ de F' .

Propriété. Plus précisément le polyèdre régulier P admet un déplacement unique² qui transforme l'arête AB en l'arête $A'B'$ de manière que A vient en A' et B en B' ; et un seul déplacement tel que A vient en B' et B en A' .

Si l'on reprend l'exemple du cube, FIG 14, la rotation r transforme S_4 en S_1 et S_1 en S_2 . Les faces $F = S_4S_1S_2S_3$ et $F_1 = S_4S_1S_5S_8$ d'arête commune S_4S_1 sont transformées en $F' = F$ et $F'_1 = S_1S_5S_6S_2$ d'arête commune S_1S_2 : les dièdres F, S_4S_1, F et F_1 et F, S_1S_2, F'_1 sont de même sens et mesure ici $-\frac{\pi}{2}$. Soit r' la rotation qui transforme S_4 en S_2 et S_1 en S_1 , son axe passe

par la diagonale S_7S_1 et son angle- $2\pi/3$ (un tiers de tour dans le sens rétrograde autour de l'axe

S_7S_1 Par r' , la face F a pour image F'_1 et F_1 a pour image F : les dièdres $FS_4S_1F_1$ et $F'S_4S_1F_1$ sont de même sens et mesure $-\frac{\pi}{2}$.

¹ On dit maintenant "admet des déplacements qui le conservent".

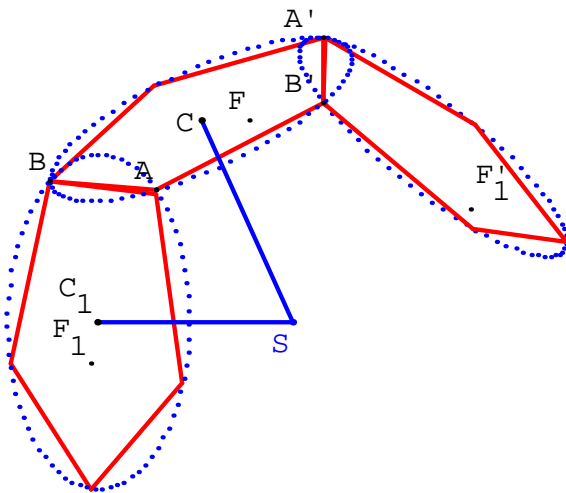
² Il serait aisé de prouver qu'il s'agit nécessairement d'une rotation puisque le centre S du polyèdre est invariant par ce déplacement par conservation des distances.

Preuve. Plus généralement sur le polyèdre régulier P , les faces F et F_1 ayant AB comme arête commune, devront venir sur les faces F' et F_1' ayant $A'B'$ pour arête commune. Dans le déplacement qui amène A en A' et B en B' , le sens du dièdre $F'.A'B'.F_1'$ est le même que celui du dièdre $F.AB.F_1$. De même il existe un déplacement unique qui transforme A en B' et B en A' . C'est celui qui amène F en F_1' et F_1 en F' dans lequel le sens du dièdre $F'.B'A'.F_1'$ est le même que celui du dièdre $F.BA.F_1$. Dans chacun de ces deux déplacements qui échangent les arêtes AB et $A'B'$, les conditions du théorème 3 sont satisfaites, donc ces déplacements "conservent" le polyèdre P . Ainsi pour chaque arête AB du polyèdre régulier donnée, on obtiendra deux déplacements qui échangent les arêtes AB et $A'B'$ et conservent P .

Propriété. Le nombre de déplacements admis¹ par le polyèdre régulier est égal au double du nombre d'arêtes de celui-ci.

Théorème 4.

- 1°) Tout polyèdre régulier est inscritible à une sphère.
- 2°) Les angles polyèdres qui ont pour sommet commun le centre de cette sphère (ici S) et pour sections respectives les différentes faces du polyèdres, divisent la sphère en polygones sphériques réguliers et égaux.
- 3°) Le polyèdre est circonscriptible à une sphère, concentrique à la première.



Soit deux faces contiguës F et F_1 du polyèdre régulier P d'arête commune AB , soient (C_1) et (C) les cercles circonscrits aux polygones F_1 et F (FIG 15). Les axes Cx et Cy des cercles C et C_1 sont les lieux des points équidistants de chacun des sommets des deux polygones. Ce sont également les axes des cercles (C) et (C_1) . Or la sphère s de centre S et de rayon $SA = SB$ appartient aux axes Sx et Sy ; le point S est donc équidistant des sommets de deux faces F et F_1 . Ainsi les sommets de deux faces F et F_1 sont sur la sphère s .

FIG 15. La sphère s est donc circonscrite aux faces F et F_1 contiguës. Soit une rotation r d'axe SC qui conserve le polygone régulier F , transformant l'arête AB en une autre arête $A'B'$ de la face F . L'axe de la rotation passant par le centre S , elle conserve la sphère s ; de plus la face contiguë F_1 à F est transformée en une face F_1' contiguë à F selon l'arête $A'B'$: en effet la rotation conservant les distances le polygone F_1 a pour image un polygone F_1' égal. Donc s est aussi circonscrite à F_1' . Le théorème 3 nous permet d'affirmer que cette rotation r conserve tout le polyèdre régulier P , car la face F a pour image la face F' tel que l'intérieur du polyèdre soit du même côté des plans de F et F' . En conclusion le polyèdre est inscritible dans la sphère s .

¹ Déplacement qui conserve ce polyèdre P .

2°) Les pyramides régulières de sommet S et qui ont pour bases respectives les faces du polyèdre régulier sont égales chacune à chacune puisqu'elles coïncident les unes avec les autres dans la rotation r ci-dessus ; il en est de même de leurs angles polyèdres de sommet S. Ces angles polyèdres remplissent tout l'espace ; en effet soit une demi-droite Sx qui n'est pas l'arête d'une pyramide, elle est intérieure à un seul de ces angles dièdres puisqu'elle perce la sphère s en un seul point d'une face du polyèdre convexe P et perce aussi la sphère circonscrite en un seul point. La "réunion" de tous ces angles polyèdres remplit tout l'espace et recouvrent la sphère en polygones sphériques réguliers égaux.

3°) Ces pyramides régulières égales de sommet S ont pour hauteurs les segments tel [SC], ces hauteurs sont donc égales et perpendiculaires respectivement au plan de chaque face : il existe donc une sphère s' de centre S et de rayon SC qui est inscrite dans le polyèdre régulier P. cqfd. *Hadamard démontre que la réciproque du théorème 4 est vraie : si la surface d'une sphère est divisible en polygones réguliers égaux entre eux, les sommets de ces polygones sont les sommets d'un polyèdre régulier.*

VI ROTATIONS ET SYMETRIES D'UN POLYEDRE REGULIER

Hadamard remarque que les déplacements qui laissent "inaltéré" le polyèdre régulier P sont nécessairement des rotations puisqu'elles conservent le centre S de P (ou de la sphère circonscrite). L'axe d de ces rotations passe par S et recoupe nécessairement une face. Ou bien d coupe F en un sommet A de cette face donc de P ; ou bien en un point I d'une arête AB conservée par cette rotation, donc elle est orthogonale en I à cette arête qui est une corde de la sphère s donc I est le milieu de l'arête AB ; ou enfin, I est intérieur à la face F, celle-ci sera conservée par la rotation, donc I est le centre de la face. L'auteur classe alors les rotations qui laissent "inaltéré" le polyèdre régulier P :

1° Les rotations dont l'axe laisse invariant une face donnée. (I est le milieu d'une face)

2° Les rotations qui laissent invariant l'angle polyèdre en un sommet quelconque de P. (d coupe P en un sommet)

3° Les rotations qui conservent une arête (d est perpendiculaire au milieu de l'arête); ce sont des demi-tours qu'Hadamard appelle des transpositions. Leur axe joint le point S au milieu d'une arête.

Le polyèdre régulier P admet des plans de symétries qui le conservent. Ces plans passent par S le centre de P. Soit p un tel plan passant par S, il coupe le polyèdre P selon une droite Δ . Cette droite Δ contient une arête de P ou non.

a) Si Δ ne contient pas une arête, le plan p ne contient aucun sommet A de P, sinon la symétrie laisserait "inaltérée", pour conserver le polyèdre P, une arête AB passant par A. Alors elle échange A avec un autre sommet B, c'est le cas des plans médiateurs des arêtes de P.

b) Si Δ contient une arête AB, alors p échangeant deux faces contiguës est nécessairement le plan bissecteur du dièdre d'arête AB et dont les demi-plans sont deux faces contiguës de P.

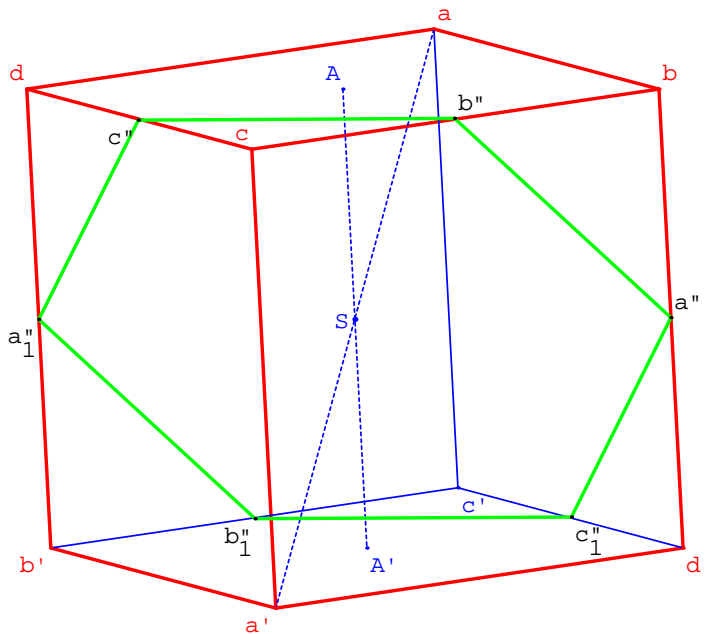
VII EXEMPLE :ROTATIONS ET SYMETRIES DU CUBE

Le cube ayant 12 arêtes, la propriété qui est une conséquence du th3 ci-dessus nous permet d'affirmer que le cube admet 24 rotations, y compris l'application identique.

1°) Si la rotation conserve une face du cube, par exemple le carré abcd (FIG 16), c'est une rotation d'ordre 4 dont l'axe est SA ou AA', on dit que la droite AA' est un axe de rotation quaternaire. Soit R la rotation d'axe A'A, $\frac{\pi}{2}$ et d'un quart de tour direct (angle $\pi/2$), $R^2 = R(A'A, \pi)$ et $R^3 = R(A'A, \frac{3\pi}{2}) = R^{-1}$ conviennent. Puisqu'il y a trois paires de faces opposées, donc 3 axes quaternaires tels A'A, cela donne $3 \cdot 3 = 9$ rotations qui conservent le cube.

2°) Si la rotation conserve un sommet tel a , elle conserve le trièdre $a(dc'b)$, c'est à dire la pyramide régulière $a dbc$ dont la base est le triangle équilatéral $dc'b$. L'axe de la rotation est donc l'axe de ce triangle : la diagonale aa' . Pour conserver ces trièdres, les rotations sont d'ordre trois, si R' est la rotation d'axe $a'a$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, $R'^2 = R(a'a, -\frac{2\pi}{3}) = R'^{-1}$, conviennent. ($R'^3 = Id$). Puisqu'il y a 4 diagonales, cela donne $4 \times 2 = 8$ rotations. Le triangle équilatéral $b'cd'$ est *inaltéré* par R' et a' invariant. Les milieux des arêtes images l'une de l'autre se correspondent par R' . Par suite aa' , passant par S est une hauteur de la pyramide régulière $a(a''_1 c''_1 b''_1)$ et aa' est perpendiculaire au plan $(a''_1 c''_1 b''_1)$ en S . Ce plan coupe le cube selon un hexagone régulier $a''_1 b''_1 c''_1 a'' b'' c''$ (cf FIG 16)

(3°) Si la rotation est un demi-tour qui joint S au milieu d'une arête, ou le milieu de deux



arêtes opposées et parallèles, ce sont des rotations d'ordre 2. Puisqu'il y a 12 arêtes, il y a 12 axes binaires pour le cube.

Nous avons ainsi obtenu $9+8+12 = 23$ rotations auxquelles il faut ajouter l'identité ; il n'y en a pas d'autre.

Le point S est un centre de symétrie pour le cube, comme pour tout parallélépipède.

Pour les symétries plans ou réflexions, du type a) ci-dessus il y a trois symétries par rapport aux trois plans médiateurs des arêtes ac' , ab et ad . Pour ceux du type b) il y a six paires d'arêtes opposées et parallèles donc six plans bissecteurs des dièdres de deux faces contiguës ; ce qui donne 6 symétries plans. Ce qui fait 9 symétries plans.

Remarque. Hadamard n'évoque pas ici les rotations-réflexions composée d'une rotation et d'une symétrie plan, l'axe de la rotation étant perpendiculaire au plan de la réflexion. Son objectif n'est pas de dénombrer les 48 éléments du groupe des isométries qui conserve le cube.

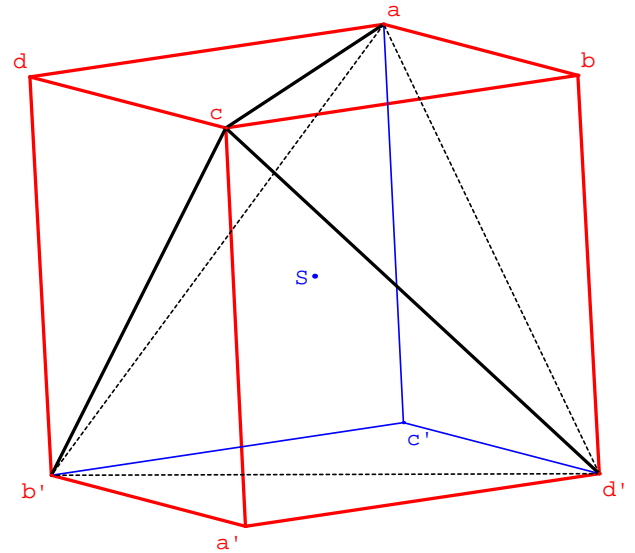
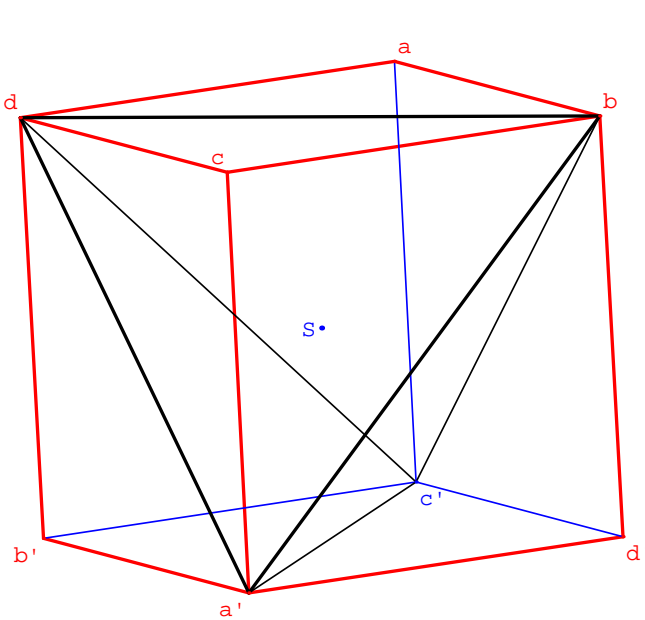
VIII EXEMPLE: ROTATIONS ET SYMETRIES DU TETRAEDRE REGULIER.

Une pyramide régulière $ABCD$ dont la base BCD est un triangle équilatéral et dont toutes les arêtes latérales sont égales au côté du triangle BCD est un polyèdre régulier dont les faces sont des triangles équilatéraux égaux. A, B, C et D sont ses 4 sommets, AB, AC, AD, BC, CD, DB sont les 6 arêtes et les 4 triangles ABC, ACD, ADB et BCD ses 4 faces. Ses angles trièdres sont réguliers et ont des faces égales à 60° , ils sont égaux entre eux.

La construction d'un tétraèdre à partir d'un triangle équilatéral BCD est évidente : il suffit de construire sur l'axe de ce triangle un point A tel que $AB = BC$ le côté du triangle.

Propriété. Dans tout cube peut inscrire deux tétraèdre réguliers T et T'.

En effet les diagonales de chaque face du cube (un carré de côté u) ont même longueur $u\sqrt{2}$. Ainsi sur la FIG 16 les sommets a, c, b' et d' constituent six segments égaux de longueur



$u\sqrt{2}$. Ils forment le premier tétraèdre régulier T inscrit dans le cube. Les 4 autres sommets b, d, a' et c' forment le second tétraèdre régulier T' inscrit.

FIG 17 tétraèdre régulier T

Le point S est le centre de gravité¹ de chacun des tétraèdres T et T'. De même, on vérifie aisément que T et T' sont symétriques par rapport au point S le centre du cube. S est aussi le centre de la sphère s de rayon Sa , circonscrite au cube et à chacun des tétraèdres T et T'.

Pour autant T n'admet pas de centre de symétrie. Donc les symétries qui le conservent sont des symétries plans.

- Supposons que T soit noté ABCD. Si une symétrie plane σ par rapport au plan p conserve T
 - a) ou p contient une arête AB de T, c'est alors le plan bissecteur du dièdre des faces de T d'arête AB, c'est donc le plan médiateur de l'arête opposé CB passant par AB. Il y en a 6 de cette nature, car il y a six arêtes
 - b) Ou bien p coupe une arête, alors cette arête AB est invariante par σ , p est plan médiateur de cette arête, il passe nécessairement par l'arête opposée :on retrouve les plans précédents. .

IL y a donc 6 arêtes donc 6 symétries plan qui conserve le tétraèdre régulier. Elle conservent également le cube circonscrit.

- Pour les rotations, il n'y en a pas du type 1(cf ChapVI § VII), aucune ne conserve une face de T .

Les rotations du type 2 qui conservent le trièdre A(BCD) sont d'ordre 3 et d'axe AS ou BS ou CS ou DS. La rotation R d'axe AS et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, est d'ordre 3, donc $R^2 = R \circ R$ convient

¹ La démonstration est laissée au soin du lecteur.

également. Ce qui donne $4 \times 2 = 8$ rotations d'ordre 3. Les axes sont les hauteurs du tétraèdre régulier. Remarquons que ces rotations conservent aussi T' et donc le cube $abcd'a'b'c'd'$.

Les rotations du type 3 qui conservent une arête ont pour axe la droite qui joint le milieu de deux arêtes opposées, (perpendiculaire commune à ces deux arêtes) elle sont d'ordre 2, ce sont des demi-tours. Il y en a trois. Elles conservent également T car les milieux des arêtes sont identiques pour T et T' donc le cube.

Avec l'identité on a donc $1 + 8 + 3 = 12$ rotations qui conservent T . Leur nombre est prévisible car égal au double du nombre d'arêtes d'après la propriété résultant du TH3 précédent(Chap VI).

Hadamard évoque ici qu'en composant les rotations trouvées on obtient un groupe pour le cube et un groupe de rotations du tétraèdre régulier. Il fait remarquer que le second est un sous groupe du premier. Il montre que c'est un sous groupe distingué du premier.

IX POLYEDRES REGULIERS RECIPROQUES (DUAL)

Théorème 5. *A tout polyèdre régulier en correspond un autre qui a autant de sommets que le premier a de faces et, inversement ; le nombre d'arêtes étant le même de part et d'autre.*

Le nombre des arêtes de chaque angle polyèdre de l'un des solides est égales au nombre de côtés d'une face de l'autre. Ce nouveau polyèdre est dit réciproque du premier. La relation entre les deux polyèdres est réciproque.

Voici la démonstration d'Hadamard.

Soit un polyèdre régulier P inscrit dans la sphère s de centre S , les angles polyèdres de sommets S et aboutissant aux faces de P découpent sur cette sphère des polygones réguliers sphériques $F, F', F'' \dots$. Considérons le polygone sphérique F de sommets $A, A', A'' \dots$ et dont le pôle est noté B (cf FIG 19). Les arcs des grands cercles $BA, BA', BA'' \dots$ découpe F en triangles sphériques isocèles tel BAA' . Soit F' le polygone sphérique contiguë à F selon l'arc AA', B' son pôle.

L'arc de grand cercle BB' est dans un plan passant par S et perpendiculaire en C milieu de l'arc AA' au côté AA' commun aux deux polygones F et F' . Les triangles sphériques rectangles BCA et BCA' sont symétriques l'un de l'autre. Remarque : la FIG 19 est réalisée dans le cas où P est un cube dont A est un sommet.

Sur la FIG 19 ci-dessous, si l'on réalise cette construction pour tous le polygones sphériques inscrits, considérons tous les triangles rectangle, tel ACB , de même sommet A . Soit la polygone sphérique G dont les sommets sont les pôles $B, B', B'' \dots$ des polygones sphériques $F, F', F'' \dots$. Comme les points $B, B', B'' \dots$ sont sur un même cercle de pôle A et le divisent en parties égales, le polygone G est régulier.

Ceci reste vrai pour les autres polygones tel G ayant pour pôles les sommets du polyèdre P ; de plus ils sont tous égaux à G . En conclusion $B, B', B'' \dots$ sont les sommets d'un polyèdre régulier P' inscrit dans la sphère s . Les pôles des polygones tel G sont d'ailleurs les sommets des polygones sphériques F , et inversement.

Chaque face du polyèdre P donné a pour centre un point b situé sur le rayon SB et Sb a une longueur constante . Le rapport SB/Sb étant constant : les points tels que b sont les sommets d'un polyèdre P_1 homothétiques du polyèdre P' . Dans cette homothétie, les milieux des arêtes qui se correspondent sont alignés avec le centre de l'homothétie S . Le polyèdre P_1 est le polyèdre réciproque (dual) du polyèdre initial P . Il est aisé de montrer que P_1 est conservé (*inaltéré*) par les mêmes rotations et symétries qui conservent P .

FIG 19

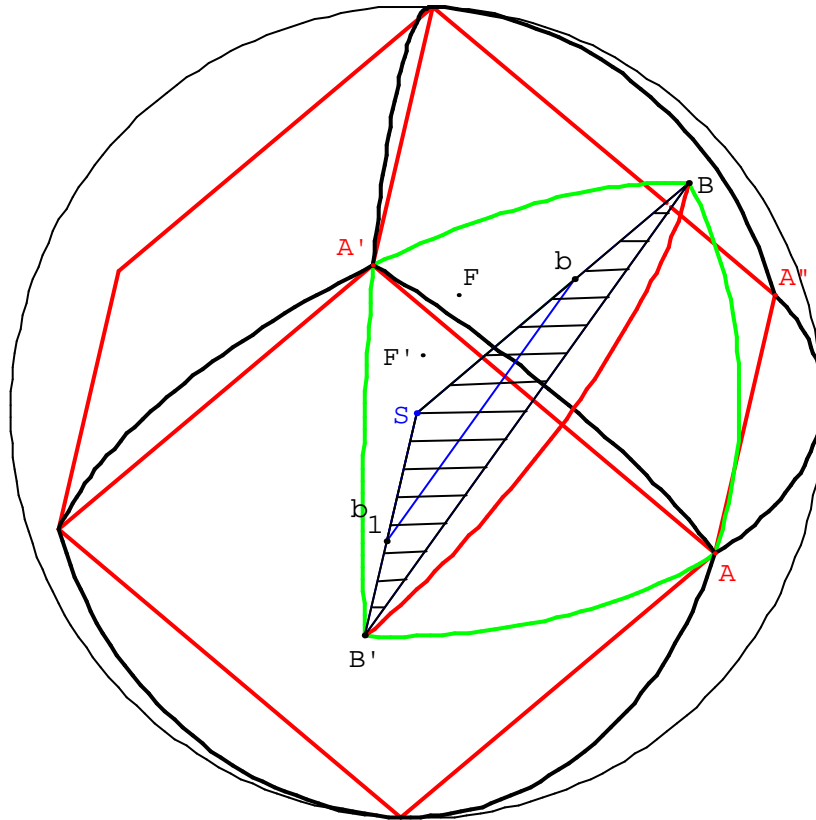
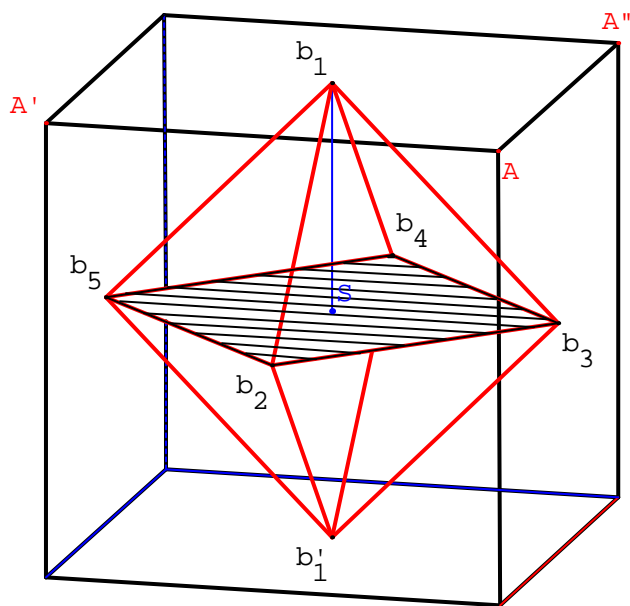


FIG 20 et 21



Le polyèdre réciproque(ou dual) du cube est ici l'octaèdre régulier b₁b₂b₃b₄b₅b'₁. (FIG 21)

X LES SOLIDES DE PLATON

Les polyèdres réguliers sont caractérisés par le fait qu'ils aient des angles polyèdres ayant mêmes nombre d'arêtes et les faces le même nombre de côtés. Hadamard démontre ici le résultat connu depuis les grecs.

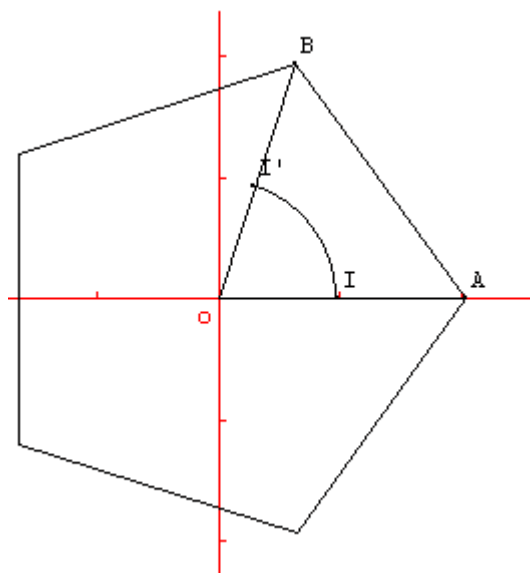
Théorème 6. *Il n'existe que cinq espèces de polyèdres réguliers.*

Voici, dans l'esprit, la démonstration d' Hadamard.

Soit un polyèdre régulier P tel que chaque face est un polygone régulier de m côtés ; et n le nombre d'arêtes de chaque angle polyèdre dont le sommet soit un sommet de P.

Chaque face étant un polygone régulier de m côtés, chaque angle d'une face a pour mesure en radian $(\pi - \frac{2\pi}{m})$. En effet l'angle au centre en o (FIG 22 : cas d'un pentagone régulier) a pour

mesure en radian $\frac{2\pi}{m}$ donc l'angle \hat{A} a pour mesure, puisque le triangle AoB est isocèle , $2 \times \frac{1}{2}(\pi - \frac{2\pi}{m}) = (\pi - \frac{2\pi}{m})$.



Par ailleurs, nous avons démontré antérieurement que la somme des angles des faces d'un angle polyèdre de sommet A est inférieur à 2π , donc chaque face a un angle inférieur en A à $2\pi/n$.

Il vient donc : $(\pi - \frac{2\pi}{m}) < 2\pi/n$. L'égalité

est exclue : on a la relation $\frac{2\pi}{m} + \frac{2\pi}{n} > \pi$.

Soit

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2} \quad (1)$$

Les entiers m et n sont tous les deux au moins égal à trois, car chaque face est au moins un triangle et chaque angle polyèdre est au moins un trièdre.

FIG 22

a) Les entiers m et n ne peuvent être tous les deux supérieurs à 3 : si $m \geq 4$ et $n \geq 4$ alors $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$ ce qui contredit (1). Donc m ou n est égal à 3 (2).

b) Supposons $m = 3$, on peut permuter éventuellement m et n dans la relation¹ symétrique (1) ; cette permutation de m et n traduit le passage d'un polyèdre régulier à son dual (ou réciproque). Si $m = 3$ chaque face du polyèdre régulier P est un triangle équilatéral.

Nécessairement d'après (1) :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2} \text{ donc } \frac{1}{n} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} : \frac{1}{n} > \frac{1}{6} \text{ donc } n < 6. \quad (3).$$

Symétriquement si $n=3$, $m < 6$ (3')

¹ Le rôle symétrique de m et n est la traduction de la permutation de m et n quand on passe du polyèdre régulier P à son dual (réciproque selon Hadamard)

c) Pour que les relations (1), (2), (3) ou (3') ci-dessus soient satisfaites, il faut en particulier que l'un des entiers m ou n soit égal à 3

$$1^\circ m = n = 3 \quad (4)$$

$$2^\circ m = 4, n = 3 \text{ ou bien } m = 3, n = 4. \quad (5)$$

$$3^\circ m = 5, n = 3 \text{ ou bien } m = 3, n = 5 \quad (6)$$

Il n'y a plus d'autres possibilités pour le couple (m, n) . Ce qui donne cinq polyèdres réguliers possibles.

Le théorème d'Euler dit $F+S = A+2$. Une face ayant m arêtes, mF est le double du nombre d'arêtes de P puisqu'ainsi, chaque arête est compté deux fois : $mF = 2A$, donc $F = 2A/m$ (7)

Chaque arête joint deux sommets de P et il part n arêtes d'un sommet donc $nS = 2A$ et $S = 2A/n$ (8).

Reportons dans la formule d'Euler, il vient en simplifiant par $2A$: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}$. (9)

La relation 9 et les relations 4, 5 et 6 nous permettent d'identifier les polyèdres possibles par le nombre de faces, de sommets et d'arêtes.

$$1^\circ) \text{ Pour } m = n = 3 : \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A} \text{ donc } A = 6 \text{ et d'après (7) et (8) : } F = 4 \text{ et } S = 4.$$

$$2^\circ) \text{ pour } m, n = 3, 4 : \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A} \text{ donc } A = 12 \text{ et d'après (7) et (8) } F = 8 \text{ et } S = 6 \text{ ou bien}$$

$$F = 6 \text{ et } S = 8$$

$$3^\circ) \text{ pour } m, n = 3, 5 : \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A} \text{ donc } A = 30 \text{ et d'après (7) et (8) : } F = 20 \text{ et } S = 12 \text{ ou bien}$$

$$F = 12 \text{ et } S = 20.$$

- Nous connaissons déjà **le tétraèdre régulier** ; le cas 1° avec 4 sommets, 4 faces triangles équilatéraux, enfin 6 arêtes.
- **Le cube** (ou hexaèdre régulier); le cas 2° avec 8 sommets, six faces(des carrés) et 12 arêtes.
- Son dual ; **l'octaèdre régulier** avec 8 faces , 6 sommets et 12 arêtes.
- Non encore évoqué, **le dodécaèdre régulier** ; le cas 3° avec 12 faces, 20 sommets et 30 arêtes.
- Enfin son dual, **l'icosaèdre régulier**, avec 20 faces, 12 sommets et 30 arêtes.

XI CONSTRUCTION DU DODECAEDRE REGULIER

A -PRINCIPE.¹

L'existence du dodécaèdre régulier Σ étant désormais assurée depuis le paragraphe X sur les solides de Platon, il est nécessaire d'en réaliser la construction.

Voici le geste de la démarche suivie par J. Hadamard.

Un pentagone régulier $P_1 = abcde$ de centre q_1 étant construit² et considéré comme une face de Σ ; Hadamard indique que nous savons construire un trièdre régulier (les trois faces sont égales et tous les dièdres égaux) de sommet a , dont les faces sont égales à l'angle du pentagone régulier ($3\pi/5$ en radian)) et tel que $ab = ae = af$. Considérant les plans (baf) et (eaf) ainsi mis au jour, il construit dans ces plans, à partir des triangles baf , eaf , deux pentagones réguliers P_2 et P_3 de centres respectifs q_2 et q_3 . Toutes deux sont superposables à P_1 puis qu'on passe de P_1 à P_2 et de P_1 à P_3 (cf §V Théorème 3 et propriété) respectivement par les rotations d'axes ea et db de même angle α : le rectiligne des dièdres P_1ea P_2 et

P_1db P_3 . Les axes des faces P_1 et P_2 se coupent en un point S qui sera le centre de la sphère (s) circonscrite au dodécaèdre régulier, comme l'assure le théorème 4 du paragraphe V. Le paragraphe VI précise qu'il existe des rotations d'axe SI (où I est le milieu d'une face du polyèdre régulier) qui laissent "inaltéré" le dodécaèdre régulier Σ . L'espace étant orienté (selon la méthode adoptée par Hadamard, en fait la règle du bonhomme d'Ampère), il définit les rotations r_1 et r_2 d'axe respectif Sq_1 et Sq_2 et de même angle $2\pi/5$ qui conservent respectivement les faces P_1 et P_2 . Il applique la rotation r_1 qui transforme P_2 en P_3 , P_3 en P_4 et P_4 en P_5 et P_5 en P_6 . Ainsi nous disposons de 6 faces du dodécaèdre. Il applique ensuite r_2 qui transforme P_3 en P_1 , elle transforme P_1 en P_6 , P_6 en P_8 et P_8 en P_7 . Enfin il considère la rotation réciproque d'axe Sq_1 : $r_1^{-1} = r_1$. Celle-ci transforme P_3 en P_2 ; P_2 en P_6 , P_7 en P_8 et P_8 en P_9 , P_9 en P_{10} et P_{10} en P_{11} . Les sommets libres des faces $P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{11}$ forment le pentagone régulier P_{12} puisqu'ils "dérivent" les uns des autres par la rotation r_1 .

B - REALISATION : LES FIGURES SONT FAITES AVEC GEOSPACW.

1° PARTIE : ASSEMBLAGES DES DOUZE FACES DU SOLIDE.

Notre objectif premier est de construire par assemblages successifs des 12 faces un solide D de l'espace, un polyèdre, dont les faces soient des pentagones réguliers égaux entre eux et dont les angles trièdres en chaque sommets soient réguliers et égaux entre eux. Dans la seconde partie nous montrerons que ce polyèdre D est concave et compact dont réalise un polytope appelé "dodécaèdre régulier" dont l'existence a été démontrée au paragraphe X ci-dessus.

§1 Construction d'un angle trièdre dont les faces sont égales à $3\pi/5$

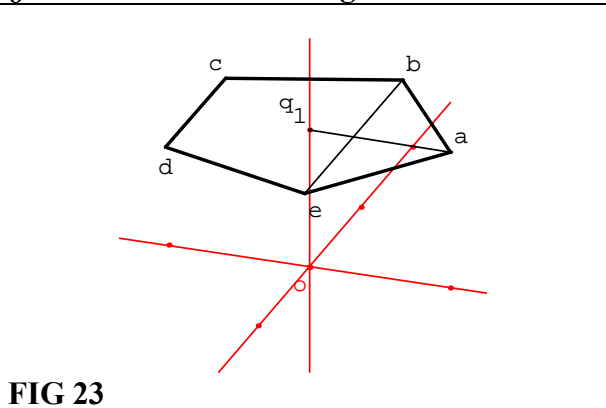


FIG 23

L'espace étant rapporté au repère orthonormé $oxyz$, soit Z le plan ($z = 1$) qui coupe l'axe oz en q_1 et le point a de coordonnées $(0,1,1)$.

(FIG 23 ci-contre). On prédéfinit par le logiciel la rotation r_1 d'axe oz et d'angle $\frac{2\pi}{5}$.

L'action répétée de r_1 sur a donne les autres sommets du pentagone régulier P_1 : b, c, d et e . En conséquence r_1 conserve le pentagone P_1 .

¹ Je ne reprends pas systématiquement les notations d'HADAMARD dans l'ouvrage cité.

² Le procédé a été étudié dans le premier tome de son ouvrage de géométrie.

Construction du trièdre régulier orienté de sens direct $t = a(bef)$ de sommet a , dont les faces sont égales à l'angle du pentagone régulier ($3\pi/5$ en radian) et tel que $ab = ae = af$. Dans la suite, nous précisons lors de la construction chaque trièdre égal à t (càd superposable à t)

ANALYSE. Supposons construit l'angle trièdre régulier $a(bef)$ de sommet a , dont les faces sont égales à $3\pi/5$. La face P_1 est alors un pentagone régulier donc les cinq arêtes sont égales: $ab = ae = af$, et $eb = ef$. Soit s_1 la sphère de centre a et de rayon ab (en rouge), s_2 la sphère de centre b et de rayon be ; enfin le plan p médiateur du segment $[b,e]$. Le plan p passe par a , q_1 et f . Donc f appartient nécessairement aux surfaces s_1 , s_2 et p .

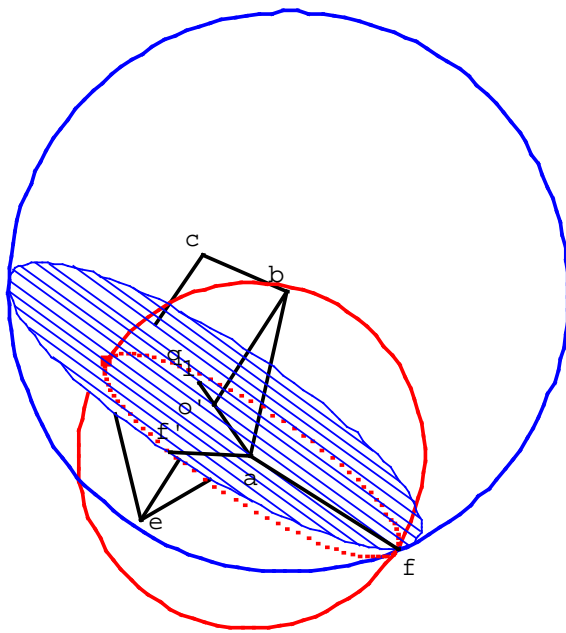
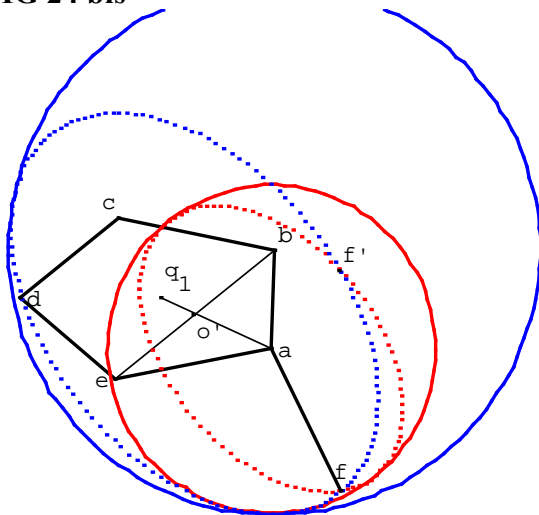


FIG 24
et FIG 24 bis



SYNTHESE

Construisons s_1 , s_2 et p . (cf FIG 24).

La sphère $s_1(a, ab)$ (en rouge) et le plan médiateur p du segment $[e,b]$ (hachuré bleu) sont sécants selon un grand cercle c_1 (en rouge) de centre a puisque le plan p passe par le centre a de la sphère s_1 , et de rayon ab .

La sphère $s_2(b, be)$ (en bleu) et le plan p sont sécants également selon le cercle c_2 (hachuré bleu) puisque la distance du centre b au plan est égale à la moitié du rayon: $be/2 = bo'$, où o' est sur le segment $[aq_1]$ et milieu de la corde $[ea]$ dans le cercle circonscrit au pentagone P_1 . Le point o' (sic FIG 24 bis) de $[e,b]$ est la projection orthogonale du centre b de la sphère s_2 sur le plan p , o' est donc le centre du cercle c_2 .

Les cercles $c_1(a, ab)$ et

$c_2(o', \sqrt{(be)^2 - \frac{1}{4}(be)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} be)$ situés dans le

même plan p sont donc sécants puisque que la distance des centres ao' répond aux conditions.

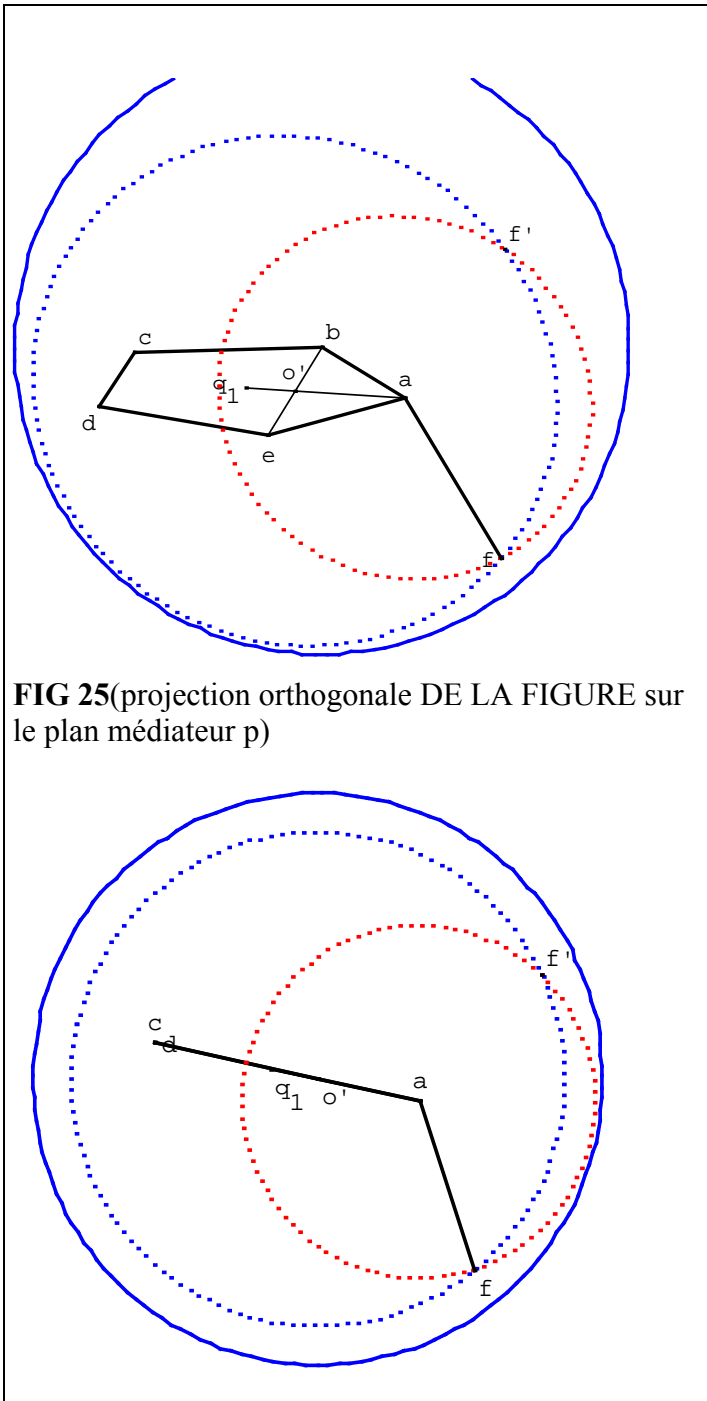
En effet dans le triangle rectangle $eo'a$ on a: $ao' < ae$ (l'hypoténuse) donc à fortiori $ao' < \text{rayon de } c_1 + \text{le rayon de } c_2$;

de même $ao' > ae - o'e$, soit $ao' > ae - \frac{be}{2}$ et

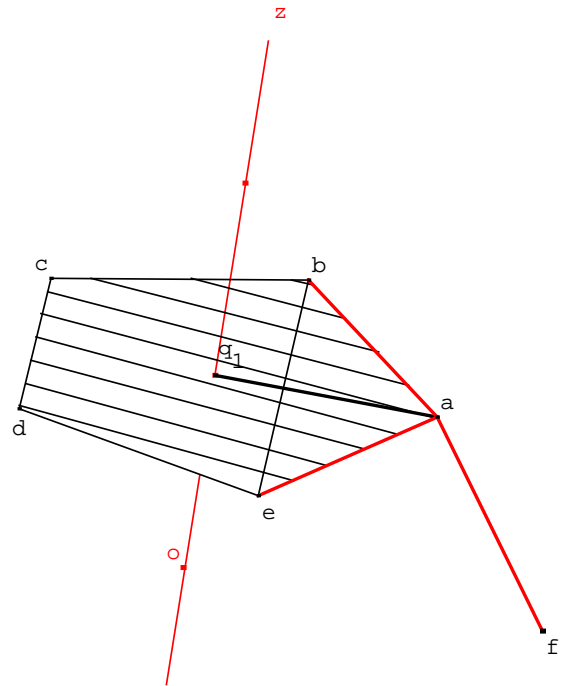
à fortiori $ao' > \left| ae - \frac{\sqrt{3}}{2} be \right|$; ainsi

$ao' > |\text{rayon de } c_2 - \text{rayon de } c_1|$. Donc les points d'intersection f et f' de c_1 et c_2 dans le plan p existent. Ecartons le point f' au dessus du plan de P_1 (fig 25 bis) afin que l'angle trièdre t construit soit de sens direct.

Considérons le trièdre $a(efb)$ ainsi construit: $fb = be$ est le rayon de la sphère s_2 ; les triangles isocèles eab et baf sont égaux puisqu'ils ont



leurs trois côtés respectivement égaux. Il en résulte que $\text{baf} = 3\pi/5$. La symétrie plan de miroir p transforme le triangle baf en eaf ce qui assure que la face eaf = $3\pi/5$ et ainsi le trièdre a(bef) a ses trois faces égales. (FIG 26)



Les trois triangles eaf, fab et bae sont égaux deux à deux, ayant un angle égal en a ($3\pi/5$) compris entre deux cotés égaux. Par suite le triangle efb est équilatéral. Puisque $ae = af = ab$, si a' est la projection orthogonale de a sur le plan efb ; (aa') est l'axe de ce triangle. Soit r_0 la rotation d'axe (aa') et d'angle $2\pi/3$: r_0 conserve l'angle trièdre $t = a(efb)$ donc transforme le dièdre b ae f en e af b et ce dernier en f ab e donc les trois dièdres sont égaux et t est bien **le trièdre régulier** recherché (FIG 26 Bis).

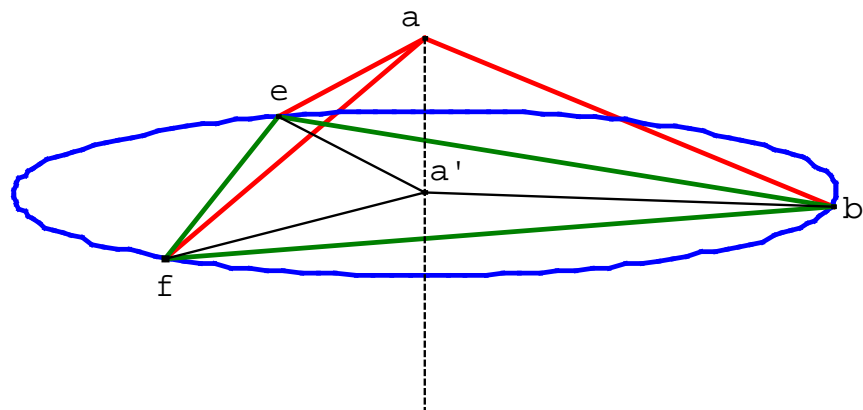


FIG 26 BIS

§2 Construction et assemblage des pentagones P2 et P3 adjacents à P1 suivant les arêtes ae et ab.

a) Par construction (sic §1 précédent) : $ab = af$ et $eb = ef$; par suite la droite (ae) est dans le plan médiateur de $[b,f]$; (bf) et (ae) sont orthogonales donc l'unique plan passant par a et orthogonal à (ae) en ω contient b . Dans ce plan $\omega b = \omega f$; il existe donc une unique rotation r d'axe ae qui transforme b en f , son angle est $\widehat{b\omega f}$. Le logiciel Geospacw permet de la définir par son axe, un point et son image et de la faire agir sur des points ou des figures sans que l'angle de la rotation soit précisé. Le pentagone régulier P_1 a pour image par r un pentagone régulier dont $[a, e]$ est un côté, et f un sommet ; appelons P_2 ce pentagone régulier égal à P_1 (FIG 27) ; son centre q_2 est l'image de q_1 par la rotation r . Par construction l'axe Sq_1 du pentagone P_1 est orthogonal à P_1 en q_1 ; donc par rotation l'axe du pentagone P_2 sera orthogonal à P_2 en q_2 .

Ces deux axes sont équidistants des sommets respectifs de P_1 et P_2 donc de a et e ; par suite ils appartiennent au plan médiateur du segment $[a,e]$. Ils sont coplanaires et de plus sécants en un point S ; désormais nous notons Sq_1 et Sq_2 les axes des pentagones P_1 et P_2 ($eafgh$) (FIG 27). Remarquons que S n'est pas invariant par r .

En résumé l'action de la rotation r est celle-ci :

a et e sont invariants

$$b \xrightarrow{r} f ; c \xrightarrow{r} g ; d \xrightarrow{r} h$$

enfin $P_1 \xrightarrow{r} P_2$

et les droites : $(Sq_1) \xrightarrow{r} (Sq_2)$.

Donc $P_2 = (aehgf)$. La symétrie plan de miroir p , plan médiateur de $[e,a]$, échange les trièdres $a(bef)$ et $e(dah)$. Donc le trièdre orienté $e(dha)$ est aussi égal à t . On pourra donc insérer dans l'angle de h selon les arêtes de ed et eh un pentagone régulier et un seul égal à P_1

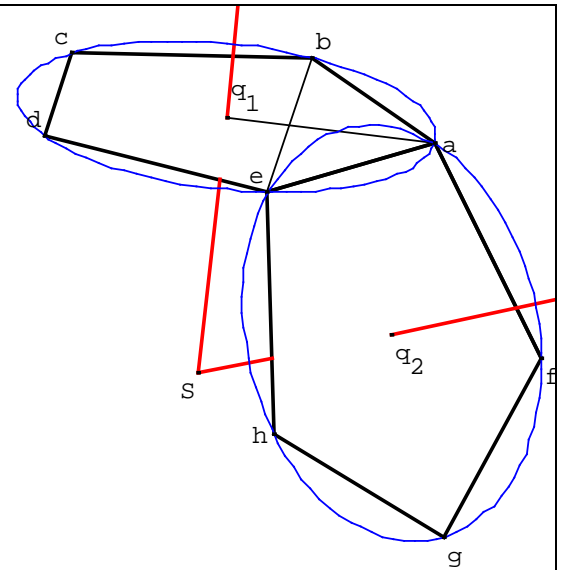
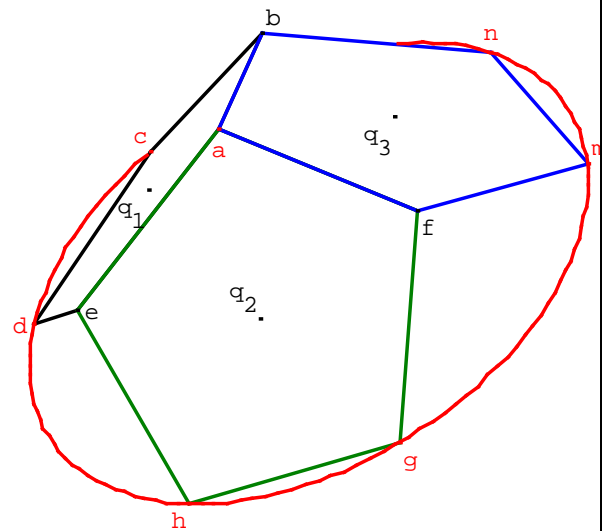


FIG 27

FIG 28 VU DE DESSUS



b) De même (ba) est incluse dans le plan médiateur de [e,f] , soit donc l'unique rotation r' d'axe ba qui transforme e en f . L'image de P_2 par r' est un pentagone régulier P_3 de centre $q_3 = r'(q_1)$ et dont l'axe, comme dans le cas précédent est sécant à Sq_2 . Le point S vérifie $Se = Sa = Sf = Sb$, ce point appartient à l'intersection des plans médiateurs des côtés [af] et [ab] donc à l'axe du pentagone P_3 : ainsi Sq_3 est l'axe de $P_3 = (afmn)$. Sur la Figure 28 (vu de dessus) les axes respectifs des faces P_1 , P_2 et P_3 sont notés Sq_1 , Sq_2 et Sq_3 . En résumé l'action de r' est la suivante :

: a et b sont invariants par r'
 $e \xrightarrow{r'} f$; $d \xrightarrow{r'} m$; $c \xrightarrow{r'} n$

$P_1 \xrightarrow{r'} P_3$

Et les droites : $(Sq_1) \xrightarrow{r'} (Sq_3)$

La symétrie plan, de miroir le plan médiateur de [a,b], échange les trièdres a(bef) et b(acn). Donc le trièdre orienté b(anc) est aussi égal à t. On peut également y insérer sur les arêtes bn et cb un pentagone régulier et un seul égal à P_1 .

Puisque l'angle trièdre orienté a(ebf) est régulier (car égal à t) et S équidistant de e, b et f ; Sa est l'axe du triangle équilatéral ebf.(sic FIG 28 BIS). Donc il existe une rotation et une seule ρ d'axe Sa et d'un tiers de tour direct qui transforme e en b, b en f et f en e

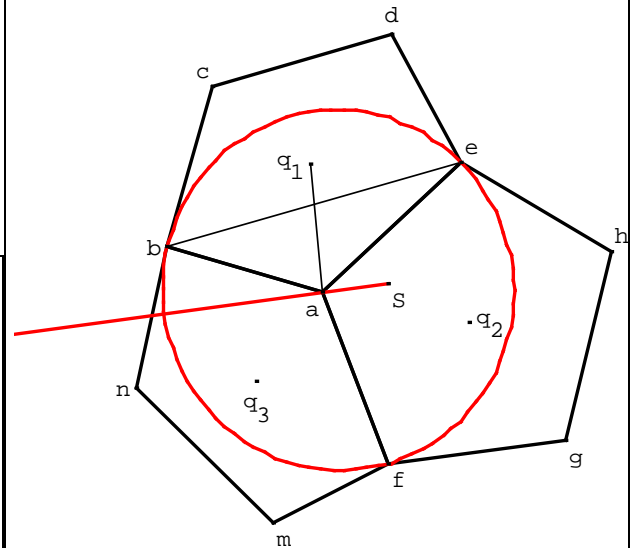
; conservant le trièdre a(ebf) cette rotation ρ transforme P_1 en P_2 , P_2 en P_3 et P_3 en P_1 . Donc l'angle trièdre orienté f(amg) est égal à a(ebf) et e(ahd) ainsi que b(can) ; ils sont tous égaux à t. Ces trois pentagones P_1 , P_2 et P_3 sont adjacents deux à deux selon une arêtes. Ils portent (Fig 28) les faces d'une pyramide régulière triangulaire de sommet a, et dont les arêtes sont les demi-droites (ae[, (af[et (ab[; le point S est à l'intérieur de celle-ci. Ceci assure l'assemblage des trois faces P_1 , P_2 et P_3 ; chacune est adjacente aux deux autres.

Propriété 1.

La surface polyédrale assemblage des trois faces $P_1 \cup P_2 \cup P_3$ limite un polyèdre ouvert Σ dont les faces adjacentes deux à deux sont incluses dans chacune des faces adjacentes d'une pyramide régulière de sommet a.

Les faces de Σ sont des pentagones réguliers égaux et les angles trièdres en chaque sommet, lorsqu'ils existent, sont égaux à t. Ici les angles trièdres de sommets e, b et f peuvent recevoir sur la troisième face des pentagones réguliers égaux à P_1 .

FIG 28 BIS VUE DE DESSOUS du côté point S



§3 Action de la rotation r1 qui conserve P1 et transforme la face P2 en P3

Sur la FIG 29 , soit l'axe Sq₁ de la rotation r₁ d'angle 2π/5. Le pentagone P₁ est invariant par r₁. Le sommet a est transformé en b, b en c , c en d et d en e , enfin e en a. Soit P₂ = (aehgf) (sic FIG 28) ; la propriété 1 (FIG 28) nous assure que le trièdre régulier orienté e(dha) est égal à t donc son image par r₁ est a(efb) donc t lui même. Ainsi r₁(d) = e et r₁(e) = a et r₁(h) = f. Le seul pentagone régulier dont trois sommets consécutifs sont f, a, et b est le pentagone régulier P₃ : r₁(P₂) = P₃.
 Les droites (S q₁) et (af), incluses dans le plan médiateur du segment [e,a], sont sécantes en I , et Sq₁ est l'axe de la rotation r₁ d'angle 2π/5 qui transforme P₂ en P₃.

L'action de r₁ est la suivante sur les droites :

- r₁(Ia) = Ib
- r₁(Ib) = Ic et r₁(Id) = Ia
- r₁(Ic) = Id

Soit la pyramide P de sommet I d'axe IS et dont les arêtes sont Ia, Ib , Ic , Id et Ie et les angles des faces a**I**b, b**I**c , c**I**d et d**I**e : la section de P par le plan de P₁ orthogonale à l'axe est le pentagone régulier P₁ = (abcde) donc P est une pyramide régulière à base pentagonale (FIG 30). Désormais nous limiterons cette pyramide par sa section (a'b'c'd'e') avec le plan (z = -1) qui portera la face du dodécaèdre opposée à P₁. Par construction, (IS) est l'axe de cette pyramide dont les faces se déduisent l'une de l'autre par r₁. le pentagone P₂ est inclus dans la face d'Ia' et par conséquent son image P₃ est inclus dans la face a'Ib'. La rotation r₁ agissant successivement sur les faces de la pyramide P agit dans le même temps sur les pentagones

$$P_1 \xrightarrow{r_1} P_3 \text{ et } P_3 \xrightarrow{r_1} P_4$$

$$P_4 \xrightarrow{r_1} P_5 \text{ et } P_5 \xrightarrow{r_1} P_6$$

P₄ est inclus dans la face bIc' de la pyramide P et a respectivement bc et bn comme arête commune avec P₁ et P₃ . ON pose r₁(m) = m' et r₁(n) = n' ;alors P₄= (bnm'n'c). De même pour P₅ situé dans la face c'Ie' et partageant avec P₁ et P₄ les arêtes respectives cd et cn' ; on pose : r₁(m') = m'' et r₁(n') = n'' et P₅ = (cdn''m''n''), L'image de P₅ est le pentagone P₆ situé dans la face e'Id' et partageant avec P₁ et P₅ les arêtes respectives de et dn''.

FIG 29

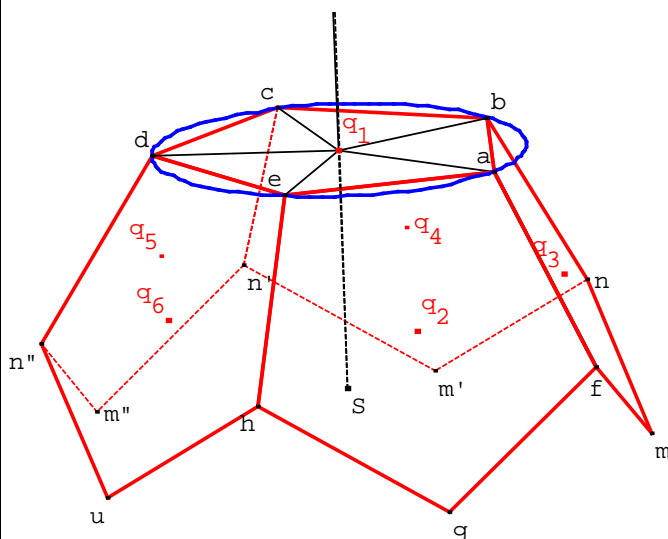
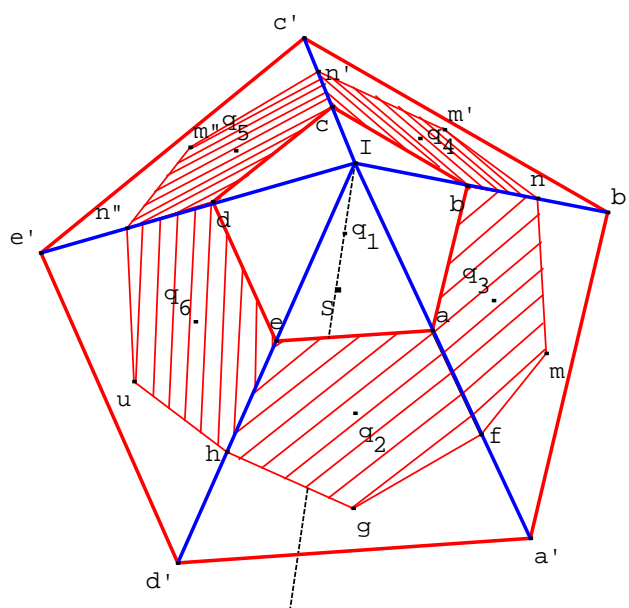


FIG 30

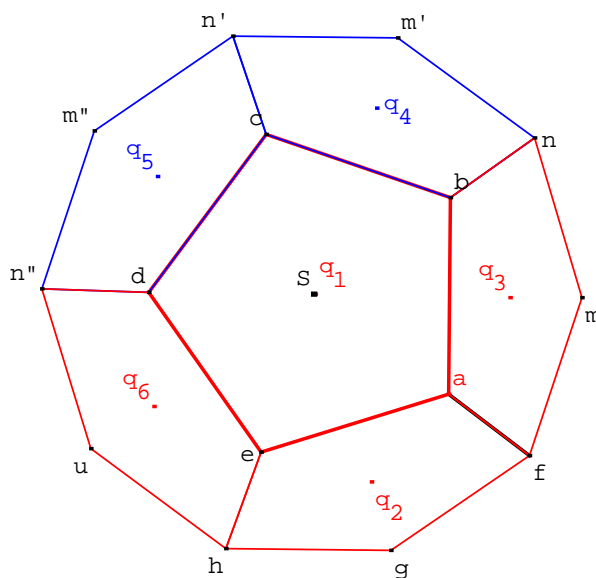


Résumons : Les trièdres orientés de sommets a, b, c, d et e et images de $t = a(efb)$ par l'action successive de la rotation r_1 sont donc égaux à t . En particulier le trièdre orienté $d(ecn'')$, image de $c(dbn')$ par r_1 est donc égal à t ; on sait que $e(adh)$ est égal à t . Il existe donc un pentagone régulier et un seul P'' dont quatre des sommets sont les points n'', d, e et h . L'image de P_5 par r_1 est un pentagone régulier P_6 dont trois sommets sont déjà définis par rotation : n'', d, e : c'est nécessairement P'' . Ainsi P_6 est un pentagone régulier adjacent respectivement à P_1, P_5 et P_2 selon ed, dn'' et eh . Posons $r_1(m'') = u$, on peut donc écrire $P_6 = (n''dehu)$. L'action de r_1 sur la face P_6 va donner un pentagone régulier égal à P_6 d'arêtes ea et eh : c'est donc P_2 . Ceci corrobore la propriété de la rotation r_1 qui est d'ordre cinq $r_1(P_6) = r_1^2(P_5) = r_1^3(P_4) = r_1^4(P_3) = r_1^5(P_2) = P_2$. La surface polyédrale ouverte $P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6 = S'$ est telle que cinq de ses faces de P_2 à P_6 ont deux côtés en communs avec deux arêtes consécutives de la pyramide P et une troisième commune avec P_1 . Chaque face polygonale P_i ($1 \leq i \leq 6$) est un pentagone régulier; adjacent à trois des cinq autres. La surface polyédrale S' limite un polyèdre ouvert Σ' qui est un tronc de la pyramide régulière pentagonale P (FIG 30). Ce tronc de pyramide dont l'axe est Sq_1 et les faces latérales portées par P_2, P_3, P_4, P_5 et P_6 a pour face supérieure P_1 . La forme de ce tronc de pyramide nous assure que l'assemblage de ces six faces est conforme à l'objectif visé. La rotation r_1 conservant les distances, les angles et leur sens; les angles trièdres orientés suivant sont aussi égaux à t : $f(agm)$, $n(amm')$ puis $n'(cm''m)$, $n''(dm''u)$ et enfin $h(eug)$

Propriété 2.

L'assemblage S' des 6 faces construites de P_1 à P_6 limite un polyèdre Σ' ouvert dont les faces sont des pentagones réguliers adjacents à P_1 et à deux autres faces. De plus les angles trièdres en chaque sommet, lorsqu'ils existent, sont égaux à t . Σ' est un tronc d'une pyramide pentagonale et régulière P dont le sommet I est sur Sq_1 et fermé par P_1 ; les faces latérales de la pyramide sont portées par P_2, P_3, P_4, P_5 et P_6 . L'axe IS est l'axe de rotation de cette pyramide et de ce tronc Σ'

FIG 31 Voici la projection orthogonale sur le plan ($z = 1$) du polyèdre convexe et ouvert Σ' à six faces (Vue de dessus du côté opposé à S)



§4 Action de la rotation r_2 qui conserve P_2 et transforme P_3 en P_1 et P_1 en P_6

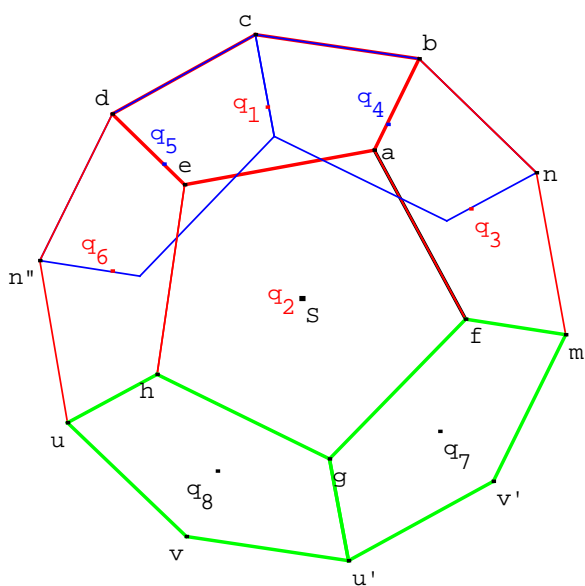
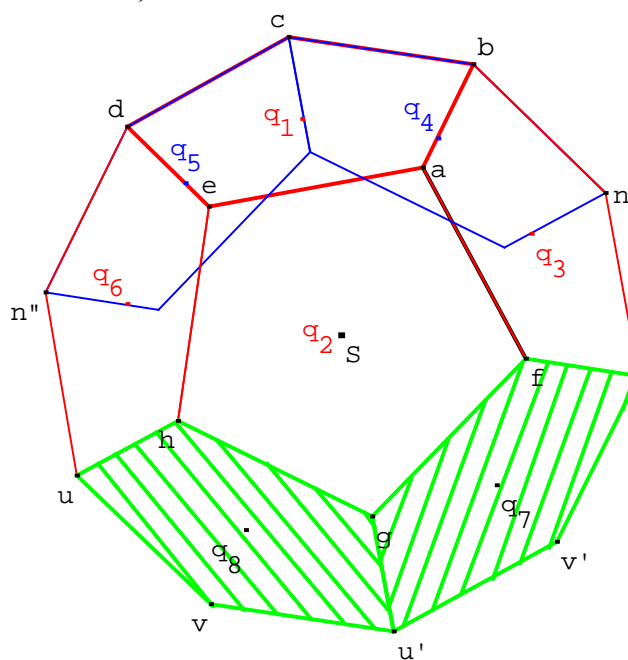


FIG 32 :Projection de la surface sur le plan de la face P_2 .
(FIG 32 bis).



Soit la rotation r_2 d'axe Sq_2 et d'angle $-\frac{2\pi}{5}$.

La rotation r_2 conserve P_2 . Reprenons avec r_2 les mêmes actions qu'avec r_1 . (FIG 32) : $r_2(P_6)$ est un pentagone régulier adjacent à P_2 selon ea et à P_1 selon ed : puisque que le trièdre orienté $e(dha)$ est égal à t , $r_2(P_6)$ est donc nécessairement P_1 . De la même façon $r_2(P_1) = P_3$. Posons $r_2(P_3) = P_7$ le pentagone régulier égal à P_3 et

ayant avec P_2 gf en commun et avec P_3 l'arête fm . Posons $r_2(m) = u'$ et $r_2(n) = v'$; ainsi P_7 est le pentagone régulier $(fmv'u'g)$. $S' \cup P_7$ est encore une surface polyédrale puisque P_7 est adjacent aux faces P_2 et P_3 . De même P_8 est le pentagone image de P_7 par r_2 , posons $r_2(v') = v$ et $S'' = S' \cup P_7 \cup P_8$ est aussi une surface polyèdre ouverte puisque P_8 est adjacent aux faces P_2 et P_7 selon les arêtes gh et gu' puisque $r_2(a) = f$ et $r_2(f) = g$. Ainsi le pentagone P_8 a pour sommets consécutifs h, g, u' et v ; le cinquième sommet v'' est tel que l'angle trièdre $h(ev''g)$ est égal à t . Or si l'on considère la face P_6 et son sommet h d'après la propriété 2, le trièdre orienté $h(eug)$ est égal à t donc nécessairement $v'' = u$ et P_8 est le pentagone $(hgu'vu)$ adjacent à P_2 selon gh et aussi à P_6 selon hu . Il y a bien fermeture avec P_6 selon hu . Ensuite l'action de r_2 sur P_8 donnera successivement P_6 puis P_1 et enfin P_3 . L'action de r_2 a ajoutée deux faces P_7 et P_8 adjacentes qui forment avec les six autres un assemblage, une surface polyédrale dont chaque face est un des huit pentagones réguliers P_j ($1 \leq j \leq 8$).

Chaque face est un pentagone régulier adjacent à trois autres faces parmi les huit. Les angles trièdres en chaque sommet de ce nouveau polyèdre sont égaux à t lorsqu'ils existent. C'est bien l'objectif visé.

Sur la figure 32 bis ci-contre, nous avons représenté la projection orthogonale sur le plan la face P_2 des huit pentagones construits. Les faces hachurées P_7 $(fmv'u'g)$ et P_8 $(huvu'g)$

§ 5 Action de $r_1' = (r_1)^{-1}$ la rotation réciproque de r_1 .

. Soit la rotation r_1' d'axes Sq_1 et d'angle $(-2\pi/5)$ Sur P_8 , (voir FIG 30), r_1' transforme m en g, f en h et g en u puisque r_1' est réciproque de r_1 . Il existe un seul pentagone régulier de la surface $S'' = S' \cup P_7 \cup P_8$ dont les sommets sont g, h et u c'est P_8 ; donc $r_1'(P_7) = P_8$. Par suite $r_1'(v') = u'$ et $r_1'(u') = v'$ (FIG 33). La rotation r_1' transforme donc la droite (mv') en (gu') et (gu') en (uv) : le plan ugS et son image nvS , passant par S invariant, sont donc sécants selon l'axe Sq_1 de la rotation et les droites images (gu') et (uv) se coupent sur cet axe Sq_1 en un point noté I' . r_1' est aussi la rotation d'axe $I'S$ et d'angle $(-2\pi/5)$. L'action successive de r_1' sur la droite (gu') va engendrer les arêtes d'une pyramide régulière pentagonale P' de sommet I' et d'arêtes consécutives Ia'' , Ib'' , Ic'' , Id'' et Ie'' . Les faces pentagonales P_7 et P_8 sont respectivement limitées par les arêtes $I'd''$ et $I'e''$ et $I'a''$ de P' . Posons $r_1'(v) = t'$ et $r_1'(t') = t''$, enfin $r_1'(t'') = v'$ puisque r_1' est d'ordre 5. Par les propriétés de cette rotation, les points coplanaires $u' v' t' t''$ et v' sont les sommets d'un pentagone régulier noté P_{12} . Les sommets de P_{12} se succèdent sur les arêtes consécutives de la pyramide P' . A ce moment nous pouvons donc assurer que les faces P_7 , P_8 et P_{12} ont en commun deux à deux une arête. Le pentagone P_8 est transformé par r_1' en un pentagone régulier noté P_9 et égal à P_8 . Puisque $r_1'(g) = u$, $r_1'(h) = n''$ et $r_1'(u) = m''$, le polygone régulier P_9 est adjacent à P_8 suivant le côté uv ; posons $r_1'(v) = t'$ alors $P_9 = (uvt'm''n'')$. De même P_9 a pour image par r_1' le pentagone régulier P_{10} adjacent à P_9 suivant le côté $t'm''$. Posons $r_1'(t') = t''$, donc $P_{10} = (t''m''n''m')$. La rotation r_1' est d'ordre 5; donc $(r_1')^5(v') = v'$, donc $v' = r_1'(t'')$ et par construction le pentagone $(v'u'vt't'')$ est régulier et adjacent aux faces P_7 , P_8 , P_6 et P_{10} , notons le P_{12} . L'action de r_1' sur P_{10} va donc donner un pentagone régulier égal à P_{10} et adjacent à P_{12} selon $t''v'$. on en déduit que $P_{11} = (t''v'mnm')$, donc adjacent à P_7 suivant le côté mv' .

FIG 33

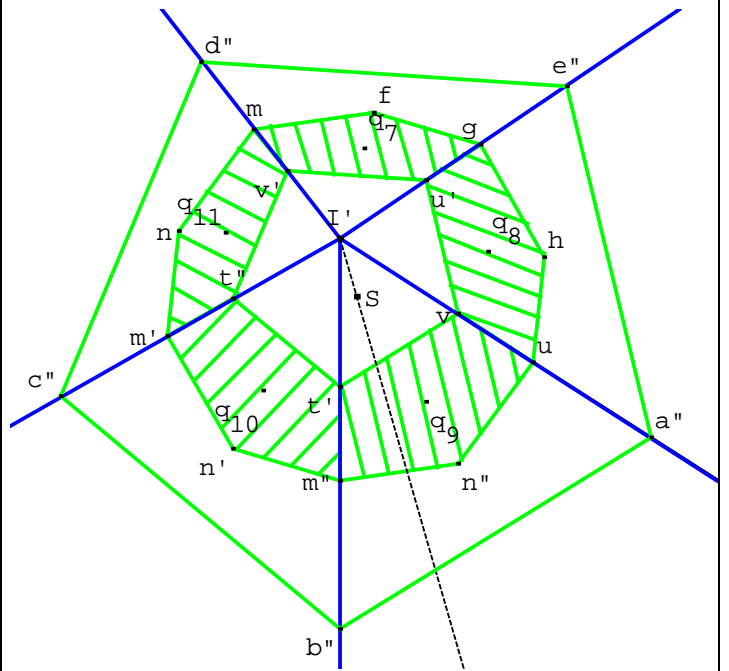
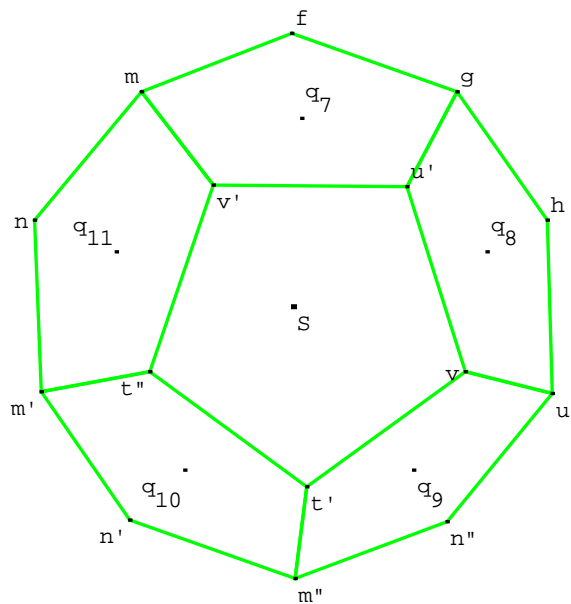


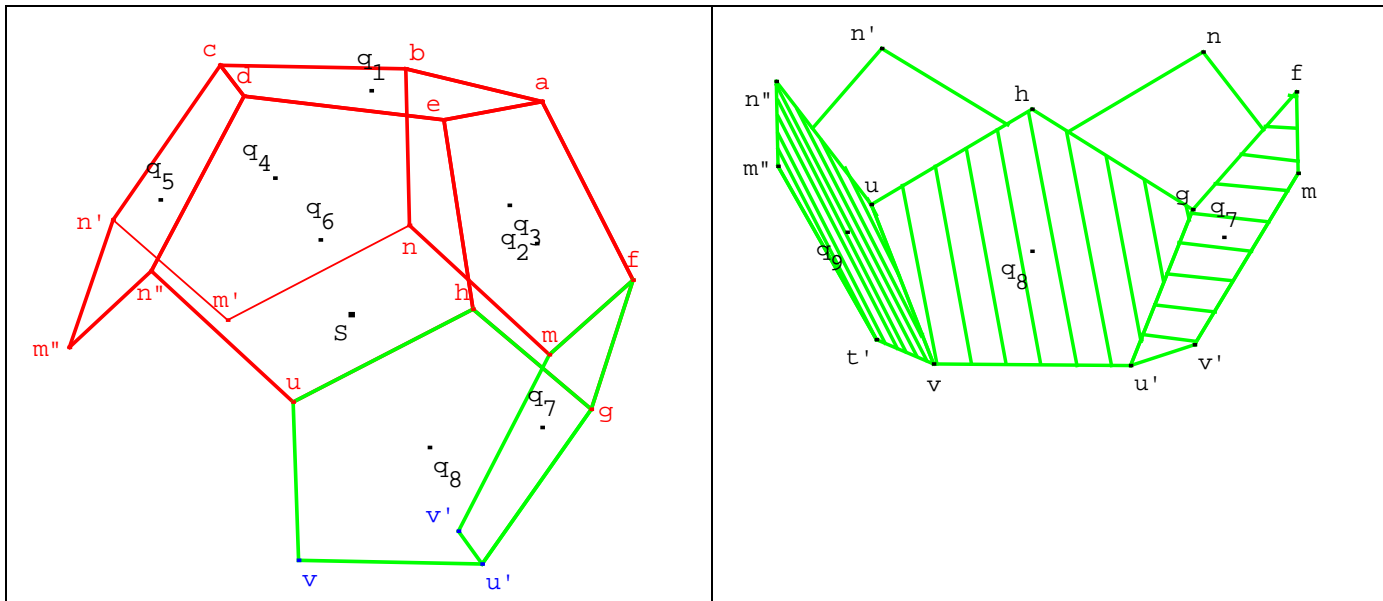
FIG 34



Propriété 3. Ainsi la réunion S'' des 6 faces construites de P_7 à P_{12} est une surface polyédrale ouverte dont les cinq faces consécutives P_7, P_8, P_9, P_{10} et P_{11} sont adjacentes à P_{12} et a deux autres faces parmi P_7, P_8, P_9, P_{10} et P_{11} selon un côté porté par une arête de la pyramide P' . (FIG 33). Cette surface polyédrale limite un polyèdre Σ'' ouvert qui est un tronc de la pyramide pentagonale et régulière P' ce tronc est fermé par P_{12} . Les faces de Σ'' des pentagones réguliers et les angles trièdres en chaque sommet, lorsqu'ils existent, sont égaux à t . La forme de ce tronc de pyramide nous assure que l'assemblage répond aux conditions initiales.

Si enfin on reprends les douze faces ainsi assemblées : pour les six premières? S' est une surface polyédrale dont chacune des cinq faces de P_2 à P_6 est adjacente à P_1 et a deux faces parmi les cinq. De même S'' est une surface polyédrale dont chacune des cinq faces de P_7 à P_{11} est adjacente à P_{12} , et adjacente a deux parmi les cinq. De plus, par construction une face de S est adjacente a deux faces de S'' . Par exemple P_7 (sic FIG 35) est adjacente à P_2 selon l'arête gf et à P_3 selon fm , et ainsi de suite. Pour terminer par P_{11} est adjacente à P_3 selon mn et à P_4 selon nm' . Si l'on considère l'ensemble des 12 faces : chacune d'elle est adjacente à cinq autres, ces faces sont des pentagones réguliers égaux, et en chaque sommets le trièdre orienté formé par les 3 arêtes issues de ce sommet est régulier et égal à l'angle trièdre t .

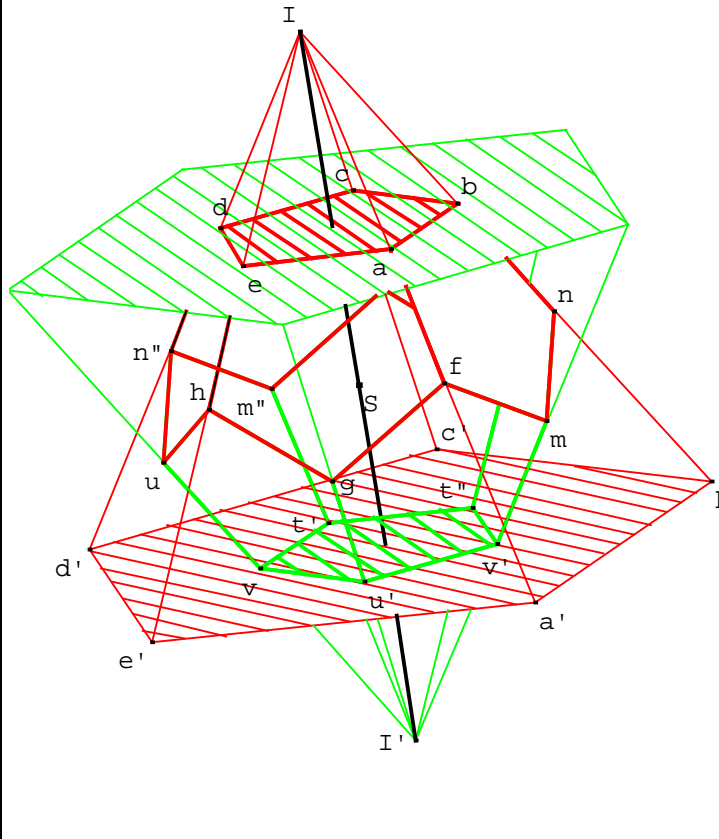
FIG 35



2° PARTIE

Montrons que les douze pentagones réguliers ainsi assemblés de P1 à P12 forment un polyèdre convexe et compact.

FIG 36



Soit V le solide (tronc de pyramide) limité par la pyramide régulière pentagonale de sommet I et dont la base est dans le plan de la face P₁₂ (en rouge sur la fig 36) ; soit V' le solide limité par la pyramide régulière de sommet I' et dont la base est dans le plan P₁(en vert sur la fig36). (FIG 36). Ces deux solides sont convexes donc leur intersection est également convexe : c'est le polyèdre D dont les faces sont les 12 pentagones réguliers, **il est donc convexe**. Ce polyèdre **D est compact** puisqu'il est inscrit dans la sphère de centre S et de rayon Sa. Nous avons vu, conséquence des propriétés de la rotation, que ses 12 faces sont des pentagones réguliers égaux entre eux ; les angles trièdres en chacun des 20 sommets sont réguliers et tous égaux à a(efb) : c'est donc un dodécaèdre régulier (Fig 37).

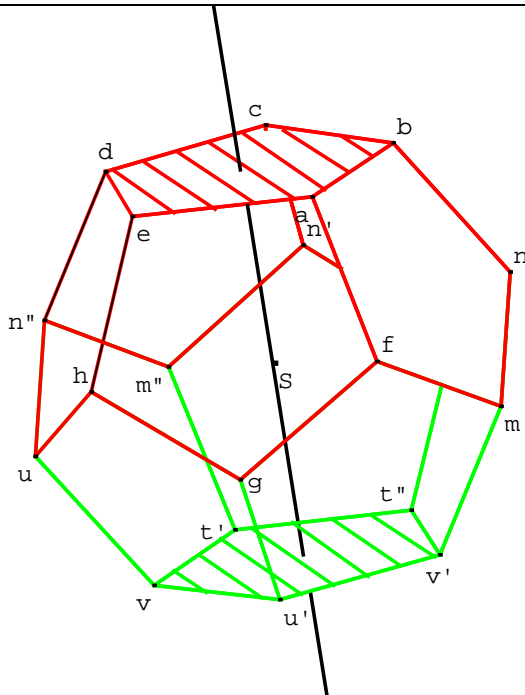
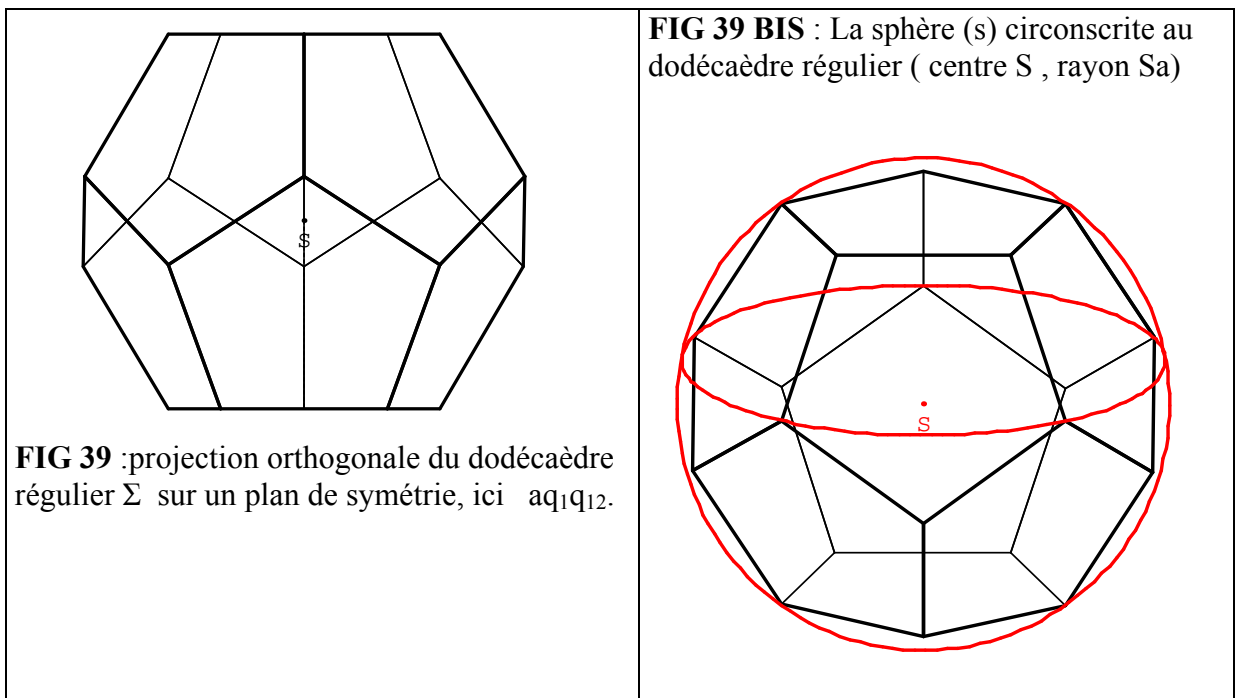
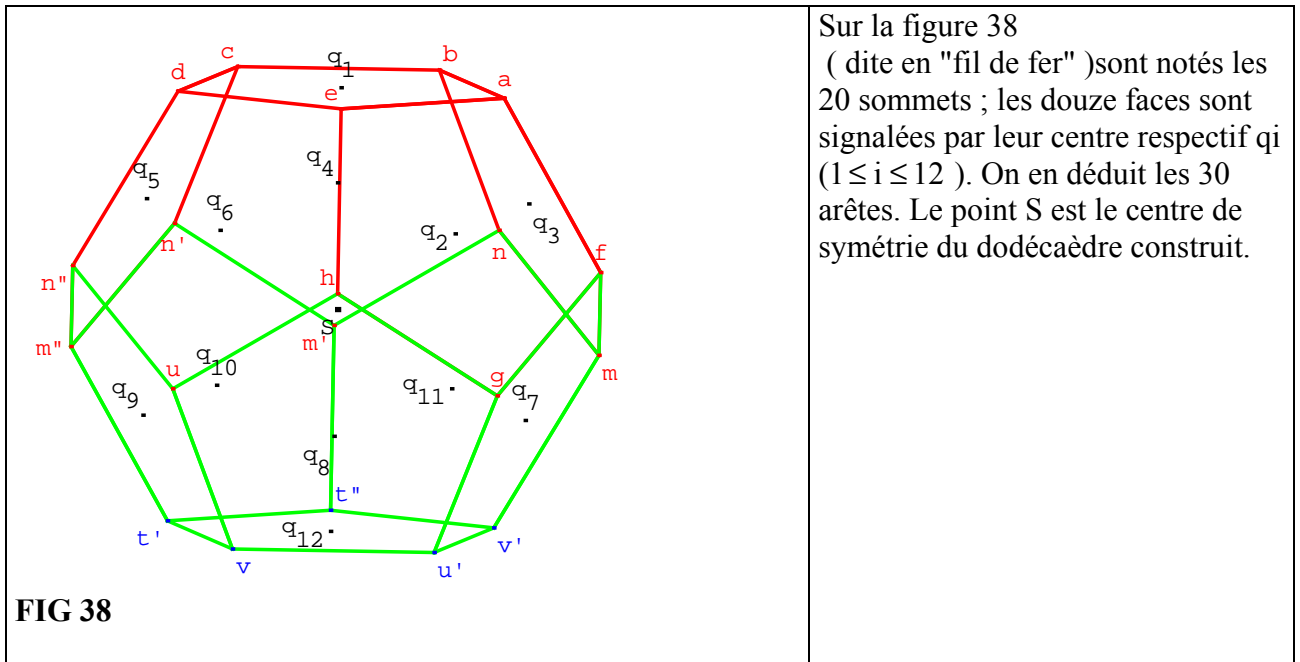
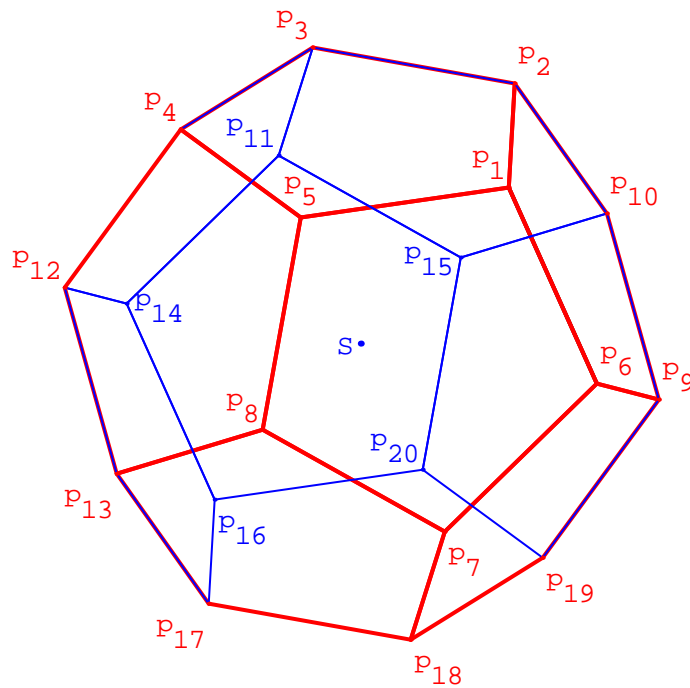


FIG 37

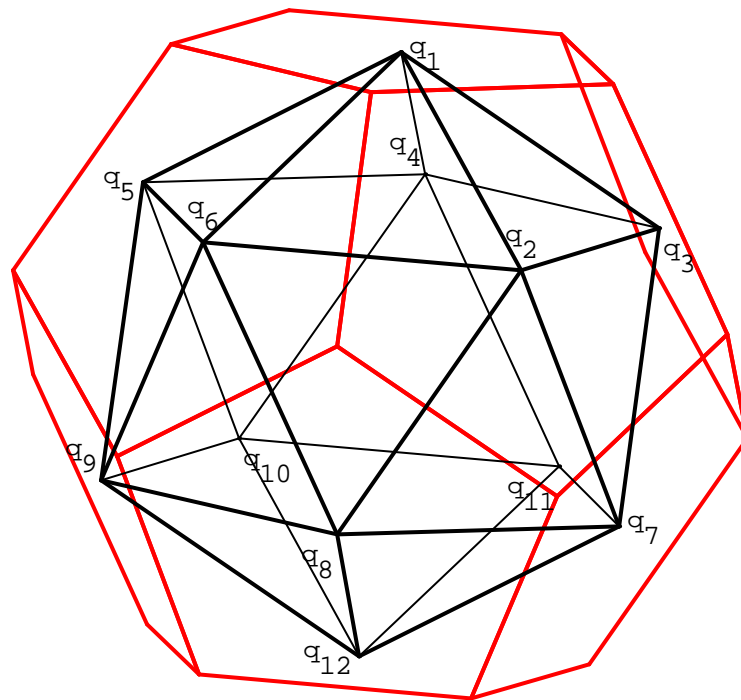


Sur la figure FIG 40 ci-dessous, nous avons renuméroté les 20 sommets du dodécaèdre régulier D. En rouge ce qui est visible par un observateur devant le tableau, en bleu ce qui est caché.



C LE DUAL : L'ICOSAEDRE REGULIER DUAL

Les sommets de l'icosaèdre dual sont les centres des faces du dodécaèdre.
FIG 41 L'icosaèdre régulier.



On peut observer les 20 faces qui sont des triangles équilatéraux et les 30 arêtes, côtés de ces triangles.

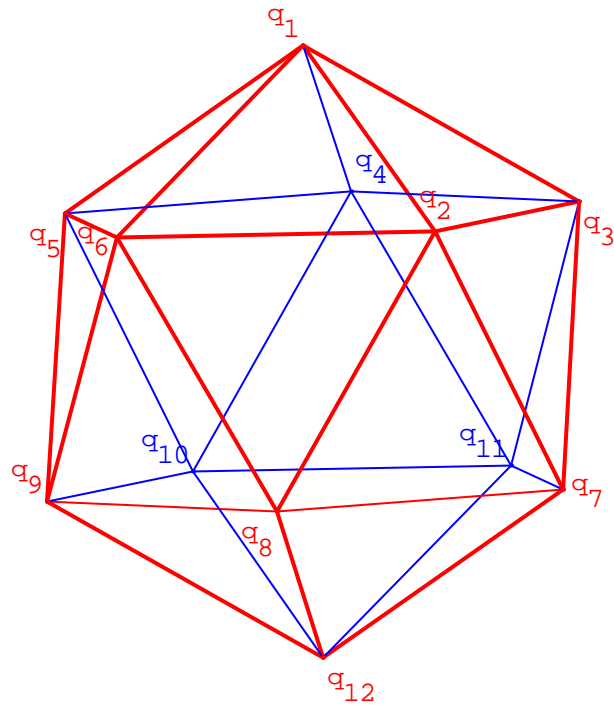
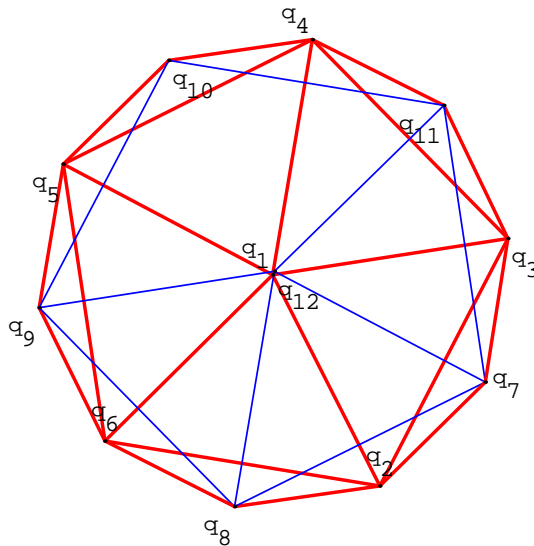


FIG 42 L'icosaèdre régulier.

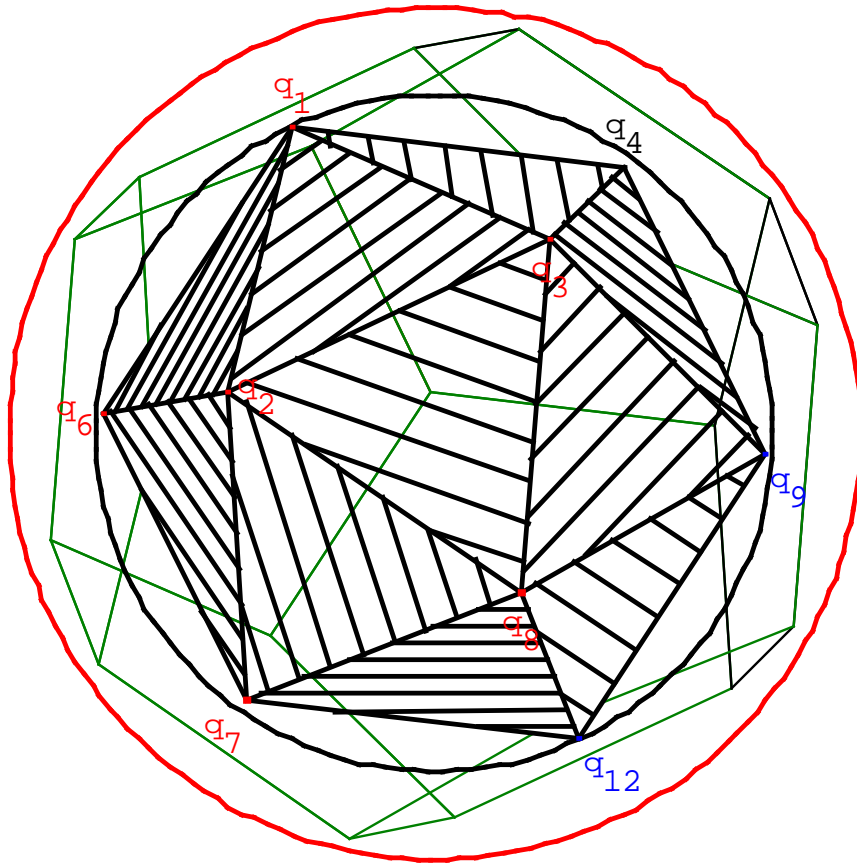
On distingue en rouge les 10 face visibles pour l'observateur placé devant. En bleu les 10 faces cachées. De q1 à q12 les 12 sommets dont 3 en bleus sont cachés : q4, q11 et q10.

FIG 43 Projection orthogonale de l'icosaèdre sur un plan perpendiculaire à l'axe q_1q_{12} .



L'observateur situé au dessus distingue en rouge 10 faces en rouge(dont 5 triangles équilatéraux). Les 10 faces en bleu sont cachées. Remarquons que le contour est un dodécagone régulier dont les sommets sont ceux de l'icosaèdre à l'exception de q_1 et q_{12} , centre de la sphère s' circonscrite à l'icosaèdre.

FIG 44



Sur la figure 44, on note les sphères s et s' respectivement circonscrites au dodécaèdre D et son dual l'icosaèdre inscrit dans D .

D : CALCULS DES DIMENSIONS DES POLYEDRES REGULIERS

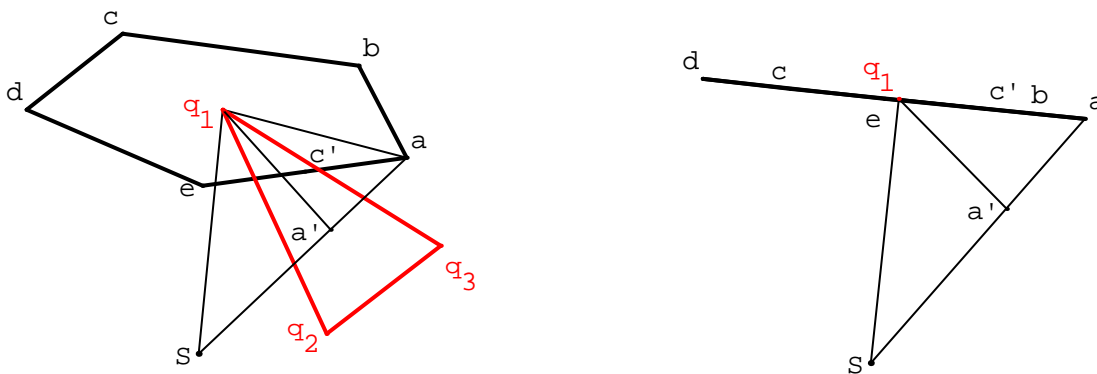


FIG 45. La figure **45 bis** est la projection orthogonale de la FIG 45 sur le plan Sq_1a . Soient R , r et ρ les rayons respectifs de la sphère circonscrite, inscrite au polyèdre P et ρ le rayon du cercle circonscrit à une face P_1 de P . (cf FIG 45)

Théorème . Les rapports mutuels de ces trois longueurs sont les mêmes pour un polyèdre régulier et son réciproque¹.

Pour fixer les idées reprenons la figure du dodécaèdre régulier P et son dual P', l'icosaèdre dont r est le rayon de la sphère circonscrite. Soit S le centre des sphères de rayons R et r. Soit q₁ le centre de la face P₁ du polyèdre P. Soit a un sommet de la face P₁ et a' le centre de la face de P'₁ (q₁q₂q₃) du polyèdre dual P' (FIG 45) ; appelons P'' le dual de P' , P'' est un dodécaèdre régulier dont a' est un sommet. De plus, P et P'' sont homothétiques dans une homothétie de centre S et de rapport Sa/ Sa'. Considérons la face P'₁ (q₁q₂q₃) et son centre a', Sa' est perpendiculaire à cette face, et donc en particulier à la droite a'q₁ : ainsi le triangle Sq₁a' est rectangle en a' (FIG 45bis). Les segments Sq₁, Sa' sont les rayons respectifs de la sphère circonscrite, inscrite au polyèdre P' et a'q₁ est le rayon du cercle circonscrit à la face P'₁ du polyèdre dual P'.

Les triangles rectangles Sq₁a et Sa'q₁ sont semblables puisque l'angle en S est commun. IL en ressort : $\frac{Sa}{Sq_1} = \frac{Sq_1}{Sa'} = \frac{aq_1}{a'q_1}$ donc $\frac{R}{R'} = \frac{r}{r'} = \frac{\rho}{\rho'}$ avec R'= r.

Le plan Q médiateur du segment [ea] passe par c' milieu de l'arête ea du polyèdre P (cf FIG 39) . On vérifie q₁a = q₁e et q₂a = q₂e (rayon du cercle circonscrit à un polygone face de P) et Sa = Se (rayon de la shère circonscrite à P), donc q₁, q₂ et S sont équidistants de e et a donc appartiennent à ce plan Q. Voici sur la FIG 40 ce plan Q (en rouge), les droites q₁q₂ et Sc' sont sécantes en c''. Projétons orthogonalement cette figure sur le plan Q : la droite (ea) se projetent sur ce plan Q en c' (cf FIG 45 bis). Et la face P₁ se projette selon le segment [a,c]. De plus c'q₁ = c'q₂, l'apothème des faces du polyèdre P. De même Sq₁ = Sq₂ = r ; donc la droite (Sc') est médiatrice du segment [q₁,q₂]; elle est donc orthogonale à ce segment en son milieu c''. Ainsi le triangle Sc''q₁ est rectangle en c''.(cf FIG 46 et 46bis). Si chaque face polygonale, telle P₁, du polyèdre P a m côtés (arêtes de P) ; désignons par c_m et a_m le côté et l'apothème de cette face. De même , si chaque face du polyèdre dual P' a n côtés désignons par c_n et a_n le côté et l'apothème de chaque face telle P'₁. Sur la FIG 46, il vient

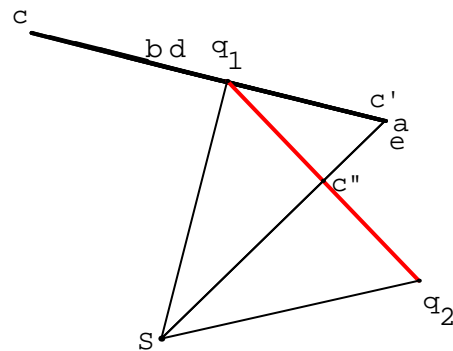
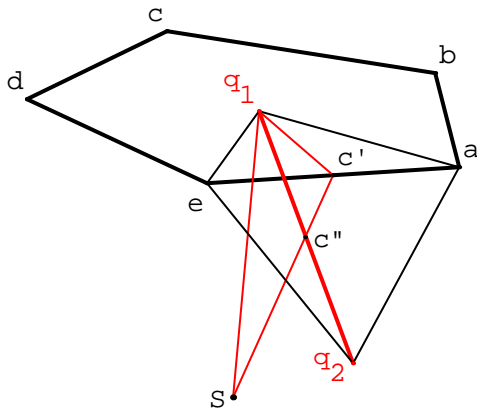


FIG 46

FIG 46 bis (projection orthogonale de FIG 46 sur le plan Q)

$c_m = ae = ab$ et $a_m = q_1c' = c'q_2$; de même $c_n = q_1q_2 = q_1q_3$ et $a_n = a'c''$

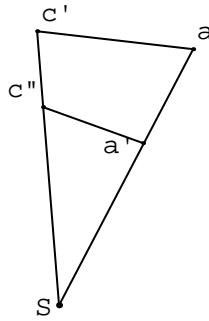
Les triangle rectangles Sq₁c' et Sc''q₁, ayant un angle aigu égal en S sont semblables . D'où

les rapports égaux $\frac{R}{r} = \frac{Sq_1}{Sc''} = \frac{q_1c'}{q_1c''}$ donc $\frac{R}{r} = \frac{r}{Sc''} = \frac{a_m}{c_n/2}$ (1) De même les triangles

rectangle Sac' et Sa'c'' en c' et a' ayant l'angle en S commun , sont semblables dans le plan Sae.

¹ Les notations utilisées ici ne sont pas nécessairement celle de l'ouvrage cité. Hadamard dit " polyèdre réciproque" pour "dual".

FIG 47 Projection de la figure sur le plan Sae



Il vient $\frac{Sc''}{R} = \frac{a_n}{c_m/2}$ (2). Multiplions membre à membre les égalités (1) et (2), il vient

$$\frac{r}{Sc''} \times \frac{Sc''}{R} = \frac{a_m a_n}{\left(\frac{c_m c_n}{4}\right)} = \frac{r}{R}. \text{ Par ailleurs } R^2 = r^2 + \rho^2, \text{ donc}$$

$$\left(\frac{r}{a_m a_n}\right)^2 = \left(\frac{R}{\frac{c_m}{2} \frac{c_n}{2}}\right)^2 = \frac{R^2 - r^2}{\frac{c_m^2}{4} \frac{c_n^2}{4} - a_m^2 a_n^2}, \text{ prenons la racine carré, de ces réels positifs :}$$

$$\frac{r}{a_m a_n} = \frac{R}{\frac{c_m}{2} \frac{c_n}{2}} = \frac{\rho}{\sqrt{\left(\frac{c_m^2}{4} \frac{c_n^2}{4} - a_m^2 a_n^2\right)}}. \quad (3)$$

Dès lors que sont connus les rapports mutuels de R, r et ρ , les côtés des polyèdres découlent des relations précédentes. Pour simplifier les résultats prenons $\rho = 1$ pour rayon du cercle circonscrit à une face du polyèdre P.

1° Cas du Tétraèdre qui est son propre dual

$$c_3 = \sqrt{3}; a_3 = \frac{1}{2}; r = \frac{R}{3}; c_3 = \frac{2\sqrt{6}}{3} R; R = \frac{3}{4} \sqrt{2}$$

2° Cube et octaèdre

$$c_4 = \sqrt{2}; c_3 = \sqrt{3}; a_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}; a_3 = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{R}{\sqrt{3}}; c_4 = \frac{2}{\sqrt{3}} R; c_3 = \sqrt{2} R; R = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

3° Dodécaèdre et icosaèdre

$$c_5 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}; c_3 = \sqrt{3}; a_5 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}; a_3 = \frac{1}{2}$$

$$r = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} R; R = \sqrt{\frac{15}{10-2\sqrt{5}}}$$

ANNEXE I

Cette annexe contient le texte correspondant à une figure Géospacw ; ce texte se réalise automatiquement lors de la construction de la figure à l'aide des outils de Géospacw. On peut aussi réaliser une figure en écrivant ce texte selon une syntaxe qui est fournie par l'aide du logiciel. Enfin, une figure étant réalisée, on peut la modifier en "éditant" son texte et en modifiant celui-ci. Ces trois aspects donnent une première idée de la souplesse d'utilisation et de son intérêt pour l'élève ou l'étudiant.

Dans cette annexe, je donne à titre d'exemples le "texte géospacw" correspondant à la figure 33 de la 6^e Partie. On pourra constater que les étapes de la construction du dodécaèdre se retrouvent. Cette figure qui est l'aboutissement des figures précédentes a un texte géospacw qui contient les éléments qui rendent possible, à loisir, la construction des figures précédentes ; c'est un des intérêts du logiciel.

TEXTE GEOSPACW DE LA FIGURE 32 (6^e Partie)

Figure Géospace : Numéro de version: 1

Uxyz par rapport à la petite dimension de la fenêtre: 0.17103393581

Rotations de Rxyz: verticale: -47.145649402 horizontale: 16.738709657 frontale: -15.446042596

q1 point de coordonnées (0,0,1) dans le repère Rxyz

Dessin de q1: rouge

a point de coordonnées (0,1,1) dans le repère Rxyz

Dessin de a: nom au-dessus, nom à gauche

r1 rotation d'axe (oq1) et d'angle $2\pi/5$ (radian)

b image du point a par la transformation r1

Dessin de b: nom au-dessus

c image du point b par la transformation r1

Dessin de c: nom au-dessus, nom à gauche

d image du point c par la transformation r1

Dessin de d: nom au-dessus, nom à gauche

e image du point d par la transformation r1

Dessin de e: nom au-dessus

P1 polygone convexe de sommets abcde

Dessin de P1: rouge, trait épais

Segment [eb]

Dessin de [eb]: non dessiné

Segment [q1a]

Dessin de [q1a]: non dessiné

s1 sphère de centre a et de rayon ae (unité de longueur Uxyz)

Dessin de s1: rouge, non dessiné

s2 sphère de centre b et de rayon be (unité de longueur Uxyz)

Dessin de s2: bleu, non dessiné

p plan médiateur du segment [eb]

c1 section de la sphère s1 par le plan p

Dessin de c1: rouge, trait épais, non dessiné

c2 section de la sphère s2 par le plan p

Dessin de c2: bleu, trait épais, non dessiné

f point d'intersection 1 des cercles c1 et c2

Dessin de f: non dessiné

f point d'intersection 2 des cercles c1 et c2

Dessin de f: nom au-dessus, nom à droite

Segment [af]

Dessin de [af]: rouge, trait épais

r rotation définie par l'axe (ae) et les points b et f

g image du point c par la transformation r

Dessin de g: nom au-dessus

h image du point d par la transformation r

P2 polygone convexe de sommets aehgf

Dessin de P2: rouge, trait épais

q2 centre du cercle circonscrit au triangle eaf
 Dessin de q2: rouge, nom à droite
 r' rotation définie par l'axe (ba) et les points e et f
 m image du point d par la transformation r'
 n image du point c par la transformation r'
 Dessin de n: nom au-dessus, nom à droite
 P3 polygone convexe de sommets abnmf
 Dessin de P3: rouge, trait épais
 q3 image du point q2 par la transformation r1
 Dessin de q3: rouge, nom au-dessus
 l droite perpendiculaire au plan aeh passant par q2
 Dessin de l: non dessiné
 S point d'intersection des droites (oq1) et l
 Dessin de S: nom au-dessous, marque épaisse
 Segment [Sq1]
 Dessin de [Sq1]: vert
 Segment [Sq2]
 Dessin de [Sq2]: rouge, non dessiné
 Segment [Sq3]
 Dessin de [Sq3]: bleu, non dessiné
 r2 rotation d'axe (Sq2) et d'angle $2\pi/5$ (radian)
 q' image du point q2 par la transformation r1
 Dessin de q': non dessiné
 q4 image du point q3 par la transformation r1
 Dessin de q4: nom au-dessous, nom à gauche
 q5 image du point q4 par la transformation r1
 Dessin de q5: bleu, nom au-dessus, nom à gauche
 q6 image du point q5 par la transformation r1
 Dessin de q6: rouge, nom au-dessus, nom à gauche
 P4 polygone régulier d'axe (Sq4), de sommet b, à 5 côtés
 Dessin de P4: bleu
 P5 polygone régulier d'axe (Sq5), de sommet c, à 5 côtés
 Dessin de P5: rouge, trait épais
 P6 polygone régulier d'axe (Sq6), de sommet d, à 5 côtés
 Dessin de P6: rouge
 Segment [bn]
 Dessin de [bn]: rouge, trait épais
 q7 image du point q6 par la transformation r2
 Dessin de q7: rouge, nom au-dessous, nom à droite, marque épaisse
 q8 image du point q7 par la transformation r2
 Dessin de q8: rouge, nom au-dessus, nom à droite, marque épaisse
 P7 polygone régulier d'axe (Sq7), de sommet h, à 5 côtés
 Dessin de P7: rouge, trait épais
 P8 polygone régulier d'axe (Sq8), de sommet g, à 5 côtés
 Dessin de P8: rouge, trait épais
 r'1 rotation d'axe (Sq1) et d'angle $2\pi/5$ (radian)
 q9 image du point q8 par la transformation r'1
 Dessin de q9: bleu
 q10 image du point q9 par la transformation r'1
 Dessin de q10: bleu, nom au-dessus, nom à gauche
 q11 image du point q10 par la transformation r'1
 Dessin de q11: bleu, nom à droite
 P9 polygone régulier d'axe (Sq9), de sommet m, à 5 côtés
 Dessin de P9: bleu
 t image de f par la symétrie de centre S
 Dessin de t: nom à gauche
 P10 polygone régulier d'axe (Sq10), de sommet t, à 5 côtés
 Dessin de P10: bleu
 P11 polygone régulier d'axe (Sq11), de sommet t, à 5 côtés
 Dessin de P11: bleu

q12 image de q1 par la symétrie de centre S
 Dessin de q12: bleu, nom à gauche
 Segment [Sq12]
 Dessin de [Sq12]: vert
 Segment [ft]
 Dessin de [ft]: vert.Fin de la figure

ANNEXE II VARIATION SUR LA CONSTRUCTION DU DODECAEDRE REGULIER PAR EUCLIDE et figures GEOSPACW.

I MOYENNE ET EXTREME PROPORTION ET LE NOMBRE D'OR, noté ici

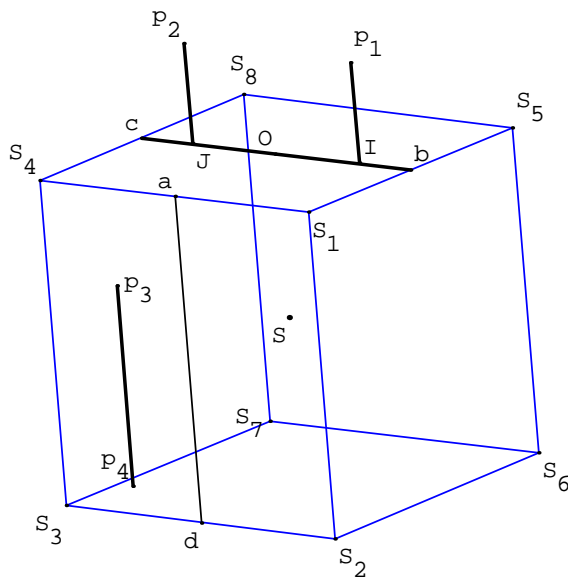
$$\Phi = (\text{rac}(5)+1)/2.$$

Le repère orthonormé Sxyz étant lié au cube de côté 2 ; le centre du cube est l'origine et les axes Sx Sy sz respectivement les axes de trois faces du cube . Construisons trois sommets p_1 , p_2 et p_3 de la face P_1 (le premier pentagone), ainsi nous aurons une face du dodécaèdre $P_1 = p_1p_2S_4p_3S_1$. Nous savons par Euclide que I divise [O,b] dans le rapport du nombre d'or Φ (solution positive de $x^2 = x + 1$) : $IO/Ib = \Phi$.

Sur la figure ci-dessus, démontrons que les coordonnées de I sont $(0, \Phi-1, 1)$ puis de $p_1(0, \Phi-1, \Phi)$. *Preuve* : $IO/(1-IO) = \Phi$, ce qui donne $(1+\Phi)IO = \Phi$ et enfin $IO = \Phi/((1+\Phi)) = 1/\Phi = \Phi-1$.

Ainsi I a pour coordonnées $(0, \Phi-1, 1)$. Pour obtenir la cote de p_1 on ajoute à 1 le nombre $\Phi-1$, ainsi $p_1(0, \Phi-1, \Phi)$. Ensuite appliquons la translation de vecteur \vec{IJ} et la composée f_1 de r_1 et r_2 les rotations d'axes Sz et d'angle $1/4$ de tour direct pour en déduire p_2 puis p_3 et p_4 . Il est aisé de démontrer que f_1 est la rotation d'axe SI et d'angle $2\pi/3$ Ce qui permet de construire le 1° pentagone $P_1 = p_1p_2S_4p_3S_1$. Ensuite il suffit de réitérer la construction pour les autres faces et Euclide démontre que le dodécaèdre ainsi construit est régulier et inscrit dans une sphère de centre S et de rayon SS_1 .

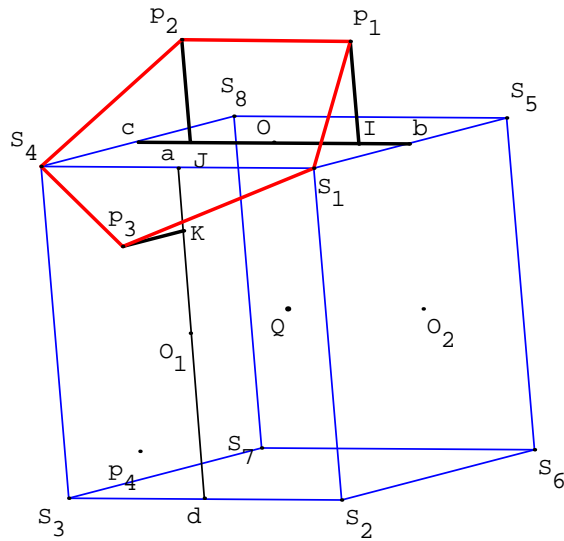
FIG1



II CONSTRUCTION DE LA 1° FACE P1

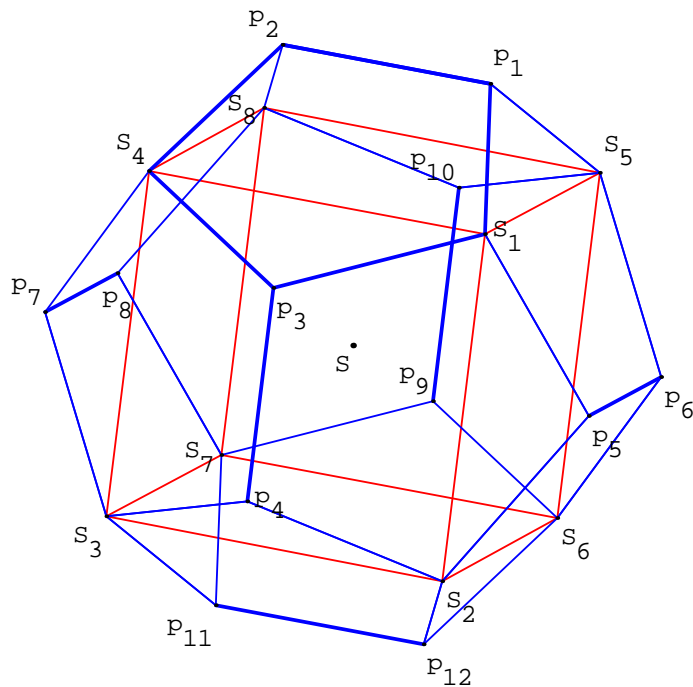
Pour P_1 , Il suffit de joindre les points $p_1p_2S_4p_3S_1$ et de démontrer qu'ils sont coplanaires.

FIG2



III CONSTRUCTION DU DODECAEDRE REGULIER (les onze faces restantes).

FIG 3



TEXTE GEOSPACW DE LA FIG3

Figure Géospace

Numéro de version: 1

Uxyz par rapport à la petite dimension de la fenêtre: 0.18856491423

Rotations de Rxyz: verticale: -17.421205756 horizontale: 12.80146603 frontale: -6.9022627487

Dessin de ox: non gradué

Dessin de oy: non gradué

Dessin de oz: non gradué

S1 point de coordonnées (1,1,1) dans le repère Rxyz

Dessin de S1: nom à droite

S2 point de coordonnées (1,1,-1) dans le repère Rxyz

S3 point de coordonnées (1,-1,-1) dans le repère Rxyz

S4 point de coordonnées (1,-1,1) dans le repère Rxyz

S5 point de coordonnées (-1,1,1) dans le repère Rxyz

S6 point de coordonnées (-1,1,-1) dans le repère Rxyz

S7 point de coordonnées (-1,-1,-1) dans le repère Rxyz

Dessin de S7: nom à gauche

S8 point de coordonnées (-1,-1,1) dans le repère Rxyz

Dessin de S8: nom à gauche

cu polyèdre convexe de sommets S1S2S3S4S5S6S7S8

Dessin de cu: rouge

S point de coordonnées (0,0,0) dans le repère Rxyz

Dessin de S: marque épaisse

a milieu du segment [S4S1]

Dessin de a: non dessiné

c milieu du segment [S4S8]

Dessin de c: non dessiné

b milieu du segment [S1S5]

Dessin de b: non dessiné

d milieu du segment [S3S2]

Dessin de d: non dessiné

Segment [bc]

Dessin de [bc]: trait épais, non dessiné

Segment [ad]

Dessin de [ad]: non dessiné

W milieu du segment [bc]

Dessin de W: non dessiné

I point de coordonnées $(0, (\sqrt{5}-1)/2, 1)$ dans le repère Rxyz

Dessin de I: non dessiné

J image de I par la symétrie de centre W

Dessin de J: nom au-dessous, nom à droite, non dessiné

p1 point de coordonnées $(0, (\sqrt{5}-1)/2, 1+(\sqrt{5}-1)/2)$ dans le repère Rxyz

p2 image de p1 par la translation transformant I en J

Segment [Ip1]

Dessin de [Ip1]: trait épais, non dessiné

Segment [Jp2]

Dessin de [Jp2]: trait épais, non dessiné

s0 symétrie de centre S

r1 rotation d'axe (SS1) et d'angle $2\pi/3$ (radian)

p3 image du point p1 par la transformation r1

Dessin de p3: nom au-dessous, nom à droite

p4 image du point p2 par la transformation r1

Dessin de p4: nom à droite

Segment [p3p4]

Dessin de [p3p4]: bleu, trait épais

r'1 rotation d'axe (SS1) et d'angle $-2\pi/3$ (radian)

p5 image du point p1 par la transformation r'1

p6 image du point p2 par la transformation r'1

Segment [p5p6]

Dessin de [p5p6]: bleu, trait épais

Segment [p1p2]

Dessin de [p1p2]: bleu, trait épais

r2 rotation d'axe (SS2) et d'angle $2\pi/3$ (radian)

p7 image du point p1 par la transformation r2

p8 image du point p2 par la transformation r2

Dessin de p8: nom au-dessous

Segment [p7p8]

Dessin de [p7p8]: bleu, trait épais
 r'2 rotation d'axe (SS2) et d'angle $-2\pi/3$ (radian)
 p9 image du point p1 par la transformation r'2
 Dessin de p9: nom au-dessus, nom à gauche
 p10 image du point p2 par la transformation r'2
 Dessin de p10: nom au-dessus, nom à gauche
 Segment [p9p10]
 Dessin de [p9p10]: bleu, trait épais
 p11 image du point p3 par la transformation r2
 p12 image du point p4 par la transformation r2
 Segment [p11p12]
 Dessin de [p11p12]: bleu, trait épais
 P1 polygone convexe de sommets p1p2S4p3S1
 Dessin de P1: bleu, trait épais
 P2 image du polygone P1 par la transformation r1
 Dessin de P2: bleu
 P3 image du polygone P1 par la transformation r'1
 Dessin de P3: bleu
 P4 image du polygone P1 par la transformation r2
 Dessin de P4: bleu
 P5 image du polygone P1 par la transformation r'2
 Dessin de P5: bleu
 P6 image du polygone P2 par la transformation r2
 Dessin de P6: bleu
 r3 rotation d'axe (SS3) et d'angle $2\pi/3$ (radian)
 r'3 rotation d'axe (SS3) et d'angle $-2\pi/3$ (radian)
 P7 image du polygone P1 par la transformation r3
 Dessin de P7: bleu
 P8 image du polygone P7 par la transformation r3
 Dessin de P8: bleu
 P9 image du polygone P3 par la transformation r3
 Dessin de P9: bleu
 P10 image du polygone P4 par la transformation r3
 Dessin de P10: non dessiné
 P11 image du polygone P4 par la transformation r'3
 Dessin de P11: bleu
 Cm0 (touche 1) dessin par étapes de P2
 Cm1 (touche 2) dessin par étapes de P3
 Cm2 (touche 3) dessin par étapes de P4
 Cm3 (touche 4) dessin par étapes de P5
 Cm4 (touche 5) dessin par étapes de P6
 Cm5 (touche 6) dessin par étapes de P7
 Cm6 (touche 7) dessin par étapes de P8
 Cm7 (touche 8) dessin par étapes de P9
 Cm8 (touche 9) dessin par étapes de P11
 Double cadre limitant l'image (impression ou copie) : (0.24 , 0.13) >> (0.76 , 0.88) par rapport à la fenêtre
 Fin de la figure

FIG 4 : Numérotation des 20 sommets du dodécaèdre Σ construit et la sphère circonscrite. Le rôle du cube initial apparaît nettement sur la figure.

